

# Mémoire

présenté en vue de l'obtention de

## **l'Habilitation à Diriger des Recherches**

de l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

**Samuel Amstutz**

# **Analyse de sensibilité topologique et applications en optimisation de formes**

Soutenu le 5 décembre 2011

### **Jury :**

<b>Hédy Attouch</b>	Université de Montpellier 2	(Président)
<b>Giuseppe Buttazzo</b>	Università di Pisa	(Rapporteur)
<b>Dinh The Luc</b>	Université d'Avignon	(Tuteur)
<b>Olivier Pironneau</b>	Université de Paris 6	(Rapporteur)
<b>Michael Vogelius</b>	Rutgers University	(Rapporteur)
<b>Michel Volle</b>	Université d'Avignon	(Examineur)



UNIVERSITÉ D'AVIGNON  
ET DES PAYS DE VAUCLUSE

## Résumé

Ce document présente une synthèse de mes principaux travaux de recherche effectués jusqu'à ce jour. Ils portent essentiellement sur l'analyse de sensibilité topologique et ses applications en optimisation et reconstruction de formes. Cette technique récente consiste à étudier la sensibilité d'une fonctionnelle dépendant d'un domaine par rapport à une perturbation infinitésimale de la topologie de ce dernier, comme typiquement la nucléation d'un trou. La notion de dérivée topologique, ou gradient topologique, qui en découle peut alors être utilisée de différentes manières dans des algorithmes d'optimisation de formes afin de générer des modifications de topologie. Sont abordés les aspects analytiques, algorithmiques, ainsi que divers exemples d'applications parmi lesquels l'optimisation de structures élastiques, l'optimisation d'écoulements incompressibles ou encore la détection de défauts géométriques.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Exemples de problèmes d’optimisation de formes . . . . .	4
1.1.1	Minimisation de la compliance en optimisation de structures . . . . .	4
1.1.2	Identification de défauts . . . . .	5
1.2	Les méthodes les plus connues . . . . .	5
1.3	Sensibilité topologique : définition et premiers algorithmes . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Analyse de sensibilité topologique de quelques problèmes</b>	<b>7</b>
2.1	Problèmes elliptiques d’ordre 2 avec inclusion, trou ou fissure de type Neumann [3, 14, 12]	7
2.1.1	Une méthode adjointe généralisée . . . . .	7
2.1.2	Sensibilité topologique par rapport à une inclusion . . . . .	8
2.1.3	Extension : trou et fissure de type Neumann . . . . .	11
2.2	Problèmes elliptiques d’ordre 2 avec trou de type Dirichlet [21, 2, 4]	11
2.2.1	Sensibilité topologique en dimension 3 . . . . .	11
2.2.2	Sensibilité topologique en dimension 2 . . . . .	12
2.2.3	Généralisation à d’autres opérateurs différentiels . . . . .	13
2.2.4	Trou sphérique (3D) . . . . .	14
2.2.5	Exemples de fonctions coût . . . . .	15
2.3	Problèmes paraboliques et hyperboliques [18]	15
2.3.1	Problèmes paraboliques . . . . .	16
2.3.2	Problèmes hyperboliques . . . . .	17
2.4	Un problème elliptique d’ordre 4 [17]	18
<b>3</b>	<b>Méthodes de type gradient pour l’optimisation topologique</b>	<b>21</b>
3.1	Algorithmes élémentaires . . . . .	21
3.1.1	Détection de défauts par visualisation de la dérivée topologique [14, 12]	21
3.1.2	Insertion itérative d’obstacles [2]	21
3.2	Lien entre méthodes d’interpolation et dérivée topologique [9]	22
3.3	Une méthodes de lignes de niveaux pour l’optimisation topologique [10, 7]	24
3.4	Application à l’optimisation de microstructures [13, 20]	25
<b>4</b>	<b>Optimisation topologique sous contraintes</b>	<b>28</b>
4.1	Conditions d’optimalité [11]	28
4.1.1	Cadre général . . . . .	28
4.1.2	Un exemple . . . . .	30
4.2	Méthodes de lagrangien et de lagrangien augmenté [8]	31
4.2.1	Lagrangien et points selles . . . . .	31
4.2.2	Lagrangien augmenté . . . . .	31
4.2.3	Liens entre domaines optimaux et points selles . . . . .	32
4.2.4	Quelques résultats numériques . . . . .	33
4.3	Une méthode de pénalisation pour les contraintes ponctuelles [5, 16]	33
4.3.1	Description de la méthode . . . . .	33
4.3.2	Résultats numériques pour la conductivité . . . . .	36
4.3.3	Résultats numériques pour la contrainte de Von Mises en élasticité linéaire . . . . .	37

4.4	Prise en compte d'une contrainte sur le périmètre [1, 19] . . . . .	38
4.4.1	Périmètre régularisé . . . . .	38
4.4.2	Méthode de résolution . . . . .	39
4.4.3	Exemples numériques . . . . .	39
4.4.4	Remarque et prolongements . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Méthodes de type Newton pour l'optimisation topologique</b>	<b>42</b>
5.1	Un problème de contrôle linéaire de type bang-bang sans contrainte [6] . . . . .	42
5.1.1	Introduction . . . . .	42
5.1.2	Description et analyse de la méthode . . . . .	42
5.1.3	Un exemple numérique . . . . .	44
5.2	Cas d'un problème semi-linéaire avec contrainte [15] . . . . .	44
	<b>Publications de l'auteur</b>	<b>47</b>
	<b>Bibliographie générale</b>	<b>50</b>

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Exemples de problèmes d'optimisation de formes

L'optimisation de formes consiste à rechercher un domaine du plan ou de l'espace, voire dépendant du temps, qui soit optimal selon un certain critère et éventuellement sous certaines contraintes. L'optimisation topologique se caractérise par l'absence d'information a priori sur la topologie du domaine à obtenir, c'est à dire, en dimension 2, sur le nombre de trous qu'il peut contenir. La formulation mathématique la plus générale s'écrit donc

$$\inf \{ \mathcal{J}(\Omega) \mid \Omega \in \mathcal{E} \}, \quad (1.1)$$

dans le sens où l'on cherche non seulement la valeur de cette borne mais aussi à construire des minimiseurs approchés. Dans cette expression,  $\mathcal{J}$  est le critère à minimiser, également appelé fonction coût ou objectif, et  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des domaines admissibles. En général, l'évaluation du critère (et parfois aussi des contraintes) fait intervenir la résolution d'équations aux dérivées partielles provenant de la physique sous-jacente. Soulignons que nous avons écrit  $\inf$ , et non  $\min$ , car dans la plupart des cas la borne inférieure n'est pas atteinte. Ce caractère *mal posé* est l'une des difficultés majeures de l'optimisation de formes, notamment topologique, qui a d'importantes répercussions sur le plan du traitement numérique.

Pour fixer les idées et quelques notations, nous présentons ci-après deux problèmes classiques d'optimisation de formes. Nous renvoyons à [23, 32, 36, 48] pour d'autres exemples.

#### 1.1.1 Minimisation de la compliance en optimisation de structures

Le problème d'optimisation de structures le plus typique et le plus étudié est celui de la minimisation de la compliance en élasticité linéaire. La structure en question est représentée par le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \in \{2, 3\}$ . Les équations de l'élasticité linéaire pour le déplacement  $u \in H^1(\Omega)^N$  s'écrivent dans leur formulation forte

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \sigma(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \sigma(u)n = g & \text{sur } \Gamma_N, \\ \sigma(u)n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_D \setminus \Gamma_N. \end{cases}$$

Le tenseur des contraintes  $\sigma(u)$  est défini par la loi de Hooke

$$\sigma(u) = \lambda \operatorname{tr} e(u) I + 2\mu e(u)$$

avec  $e(u) = \nabla^s u = (\nabla u + \nabla u^T)/2$  le tenseur des déformations et  $(\lambda, \mu)$  les coefficients de Lamé du matériau. Les conditions aux limites sont constituées d'un chargement  $g \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ , d'un bord encastré  $\Gamma_D$  et d'un bord libre sur le reste de la frontière. La compliance de  $\Omega$  sous le chargement  $g$  est le travail des forces extérieures, à savoir

$$C(\Omega) = \int_{\Gamma_N} g \cdot u \, ds.$$

Cette quantité s'interprète comme la flexibilité de la structure, donc on cherche en général à la minimiser. On impose classiquement des contraintes de volume et d'encombrement. Le problème d'optimisation de forme résultant s'écrit

$$\inf \{C(\Omega) \mid \Omega \subset D, \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega, |\Omega| \leq V\},$$

où  $D$  est un domaine fixé,  $|\Omega|$  est la mesure de Lebesgue de  $\Omega$  et  $V > 0$  est donné. Le caractère génériquement mal posé de ce problème est bien connu : les suites minimisantes ont des formes de plus en plus complexes et ne convergent vers un domaine pour aucune topologie appropriée (c'est-à-dire qui rende le critère semi-continu inférieurement). Un contre-exemple analytique est exposé dans [23]. D'un point de vue pratique, il faudra donc se contenter de minimiseurs approchés ou, pire, de minimiseurs locaux.

### 1.1.2 Identification de défauts

Il est courant de formuler les problèmes inverses par des problèmes d'optimisation. Dans le cas de l'identification d'objets (ou de défauts), cela donne lieu à des problèmes d'optimisation de formes. Donnons un exemple dans le cas du laplacien. Etant donnés deux domaines  $\Omega \subset\subset D \subset \mathbb{R}^N$  et une excitation  $g$ , nous notons  $u_\Omega$  la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega = 0 & \text{dans } D \setminus \overline{\Omega}, \\ \partial_n u_\Omega = g & \text{sur } \partial D, \\ \partial_n u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notons  $\Omega^*$  le domaine recherché, pour lequel nous disposons de la mesure au bord  $f = (u_{\Omega^*})_{|\partial D}$ . Le critère à minimiser le plus souvent utilisé pour reconstruire  $\Omega^*$  est celui de moindres carrés

$$\mathcal{J}(\Omega) = \|u_\Omega - f\|_{L^2(\partial D)}^2. \quad (1.2)$$

Si la mesure  $f$  est exacte, alors il existe bien un minimiseur de (1.2) donné par  $\Omega^*$ , mais c'est l'unicité qui n'est pas garantie. De plus, en admettant l'unicité (qui peut être acquise si le nombre de mesures est suffisant), ce minimiseur sera souvent très sensible à l'addition de bruit sur  $f$ . Là encore, il est généralement indiqué de se limiter à une solution sous-optimale, qu'il faudra savoir sélectionner.

## 1.2 Les méthodes les plus connues

Il existe de nombreuses méthodes d'optimisation de formes. Cette richesse provient évidemment de la diversité des cas traités, mais souligne également la complexité du problème. Du point de vue mathématique, deux difficultés apparaissent d'emblée et ont un rôle déterminant sur la construction d'algorithmes : d'une part, le caractère mal posé décrit plus haut, et, d'autre part, l'absence de structure vectorielle naturelle sur un ensemble de domaines. Les méthodes (ou plus exactement les familles de méthodes) les plus répandues sont listées ci-dessous.

- Les méthodes stochastiques, comme les algorithmes évolutionnaires [23, 65], ont l'avantage de ne pas nécessiter de calcul de gradient et sont peu sensibles aux minima locaux. Cependant, leur coût est élevé.
- Un moyen répandu visant à mettre en oeuvre des algorithmes standards d'optimisation non-linéaire est d'appliquer ces derniers à une représentation du domaine à l'aide de paramètres réels (points de contrôle, noeuds d'un maillage...). On parle d'optimisation paramétrique [60, 56].
- L'optimisation de formes dite *classique* [68, 48] consiste à effectuer, de manière itérative, des déformations régulières de frontière. La notion de *dérivée de forme* fournit une direction de descente pour le déplacement des points du bord. Dans ce cadre, les domaines obtenus restent homéomorphes au domaine initial : il n'y a pas de changement de topologie. C'est le principal défaut de ces méthodes.
- Une variante de la méthode classique est de représenter le domaine en tant qu'ensemble de niveau d'une certaine fonction [25, 69, 59], ce que l'on écrit généralement sous la forme  $\Omega = \{\psi < 0\}$ . L'évolution de la fonction  $\psi$  est gouvernée par la dérivée de forme via une équation de Hamilton-Jacobi. Ce formalisme permet certains changements de topologie, comme la suppression ou le

recollement de trous, mais ne produit pas de nucléation. Un autre intérêt est de pouvoir utiliser un maillage fixe.

- Partant du constat que les problèmes d’optimisation topologique sont mal posés, certains auteurs ont introduit des méthodes de relaxation. La plus connue repose sur la théorie de l’homogénéisation [30, 22, 40] pour inclure dans l’ensemble admissible toute une classe de matériaux composites. Le problème résultant est bien posé par construction, et de plus différentiable, ce qui autorise l’utilisation d’algorithmes de résolution performants. Cependant, les distributions de matériau obtenues contiennent des densités intermédiaires qu’il faut ensuite éliminer par des techniques de pénalisation plus ou moins heuristiques. Une variante simplifiée et très répandue de la méthode d’homogénéisation est la méthode SIMP [32, 31, 66].
- Finalement, nous en venons à l’analyse de sensibilité topologique qui fait l’objet de ce document. Le principe est d’évaluer l’effet sur la fonction coût d’une perturbation de topologie, comme la création d’un trou. Cette idée a été introduite d’abord formellement dans [64, 42] puis dans un cadre mathématique rigoureux dans [44, 67, 54]. Des méthodes utilisant ce concept, de façon exclusive ou combinée, seront décrites plus loin.

### 1.3 Sensibilité topologique : définition et premiers algorithmes

Soit  $\Omega$  un domaine (ouvert connexe) de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \{2, 3\}$ , et un point  $z \in \Omega$ . Supposons que, lorsque  $\rho$  tend vers 0, le développement asymptotique suivant puisse être obtenu :

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{B(z, \rho)}) - \mathcal{J}(\Omega) = f(\rho)g_\Omega(z) + o(f(\rho)), \quad (1.3)$$

avec  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = 0$ . On dit alors que  $\mathcal{J}$  admet  $g_\Omega(z)$  pour dérivée topologique (aussi appelé sensibilité topologique ou gradient topologique) au point  $z$ . Signalons que le choix d’un trou circulaire est purement arbitraire. D’autres perturbations seront envisagées par la suite.

La dérivée topologique renseigne sur la variation au premier ordre de la fonction  $\mathcal{J}$  par rapport à une petite perturbation de topologie. Ainsi, comme de tout gradient, son utilisation peut se faire à deux niveaux. D’une part, elle fournit une direction de descente. Par exemple, on peut aisément concevoir un algorithme itératif qui crée des petits trous en des points  $z$  où  $g_\Omega(z) < 0$ . Le rayon ou le nombre de trous créés à chaque itération sont alors une sorte de pas à déterminer. D’autre part, la positivité de  $g_\Omega(z)$  en tout point de  $\Omega$  est une évidente condition nécessaire d’optimalité. On peut chercher à la résoudre par un algorithme de point fixe tel que celui proposé dans [44, 37] :

$$\Omega_{n+1} = \{x \in \Omega_n, g_{\Omega_n}(x) \geq t_n\},$$

où  $(t_n)$  est une suite croissante de nombres négatifs qui tend vers 0. Le principal défaut de cet algorithme, en dehors de l’absence de résultats de convergence, est qu’il ne permet à aucun moment d’étendre le domaine. Une façon d’y remédier est d’associer aux perturbations de topologie des variations de frontière, par exemple par une méthode de lignes de niveaux [24, 49]. Nous verrons plus loin une autre approche.

## Chapitre 2

# Analyse de sensibilité topologique de quelques problèmes

Ce chapitre est consacré à l'analyse de sensibilité de quelques problèmes d'équations aux dérivées partielles. L'approche mise en oeuvre s'articule autour d'une ligne directrice commune, qui est esquissée sur le problème le plus simple considéré, à savoir celui d'une inclusion pour un problème elliptique d'ordre 2. Nous nous contentons ensuite de mentionner les spécificités des autres cas.

Dans tout le chapitre,  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $\omega_\rho$  est un sous-domaine de  $\Omega$  de la forme  $\omega_\rho = z + \rho\omega$ , où  $z \in \Omega$  et  $\omega \subset \mathbb{R}^N$  est un domaine borné et régulier ( $\mathcal{C}^\infty$ ). L'ensemble  $\Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$  sera noté  $\Omega_\rho$ . Pour éviter certains conflits de notations,  $\rho$  sera parfois remplacé par  $\varepsilon$ .

### 2.1 Problèmes elliptiques d'ordre 2 avec inclusion, trou ou fissure de type Neumann [3, 14, 12]

#### 2.1.1 Une méthode adjointe généralisée

Nous commençons par établir un résultat qui servira de base pour l'analyse de sensibilité topologique présentée dans cette section, mais qui sera également utilisé, moyennant quelques adaptations, pour traiter les autres problèmes de ce chapitre. La preuve, qui consiste en de simples réarrangements, est fournie ci-après.

**Proposition 2.1** *Soit  $\mathcal{V}$  un espace vectoriel. Pour tout paramètre  $\rho \in [0, \rho_0[$ ,  $\rho_0 > 0$ , nous considérons un vecteur  $u_\rho \in \mathcal{V}$  solution de*

$$a_\rho(u_\rho, v) = \ell_\rho(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (2.1)$$

où  $a_\rho$  et  $\ell_\rho$  sont respectivement une forme bilinéaire et une forme linéaire sur  $\mathcal{V}$ . Considérons maintenant une fonction coût de la forme

$$j(\rho) = J_\rho(u_\rho) \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes : il existe des réels  $\delta a, \delta \ell, \delta J_1, \delta J_2$ , une fonction  $f : [0, \rho_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  ainsi qu'une forme linéaire  $L_\rho$  sur  $\mathcal{V}$  tels que, lorsque  $\rho \rightarrow 0$ ,

$$J_\rho(u_\rho) - J_\rho(u_0) = L_\rho(u_\rho - u_0) + f(\rho)\delta J_1 + o(f(\rho)), \quad (2.3)$$

$$J_\rho(u_0) - J_0(u_0) = f(\rho)\delta J_2 + o(f(\rho)), \quad (2.4)$$

$$(a_\rho - a_0)(u_0, v_\rho) = f(\rho)\delta a + o(f(\rho)), \quad (2.5)$$

$$(\ell_\rho - \ell_0)(v_\rho) = f(\rho)\delta \ell + o(f(\rho)), \quad (2.6)$$

où  $v_\rho \in \mathcal{V}$  est un état adjoint solution de

$$a_\rho(\varphi, v_\rho) = -L_\rho(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \quad (2.7)$$



Alors nous avons le développement asymptotique lorsque  $\rho \rightarrow 0$  :

$$j(\rho) - j(0) = f(\rho)(\delta a - \delta \ell + \delta J_1 + \delta J_2) + o(f(\rho)).$$

**Preuve.** Nous avons au vu de (2.1)

$$j(\rho) - j(0) = [J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0)] + [a_\rho(u_\rho, v_\rho) - a_0(u_0, v_\rho)] - [\ell_\rho(v_\rho) - \ell_0(v_\rho)].$$

En utilisant les équations (2.5) et (2.6) il vient

$$j(\rho) - j(0) = J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) + a_\rho(u_\rho - u_0, v_\rho) + f(\rho)(\delta a - \delta \ell) + o(f(\rho)).$$

De (2.3) et (2.4) il s'ensuit

$$j(\rho) - j(0) = L_\rho(u_\rho - u_0) + a_\rho(u_\rho - u_0, v_\rho) + f(\rho)(\delta J_1 + \delta J_2 + \delta a - \delta \ell) + o(f(\rho)).$$

L'équation adjointe (2.7) conduit au résultat annoncé.  $\square$

## 2.1.2 Sensibilité topologique par rapport à une inclusion

Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive et  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  des réels tels que  $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \beta_0 \beta_1 \geq 0$ . Pour tout paramètre  $\rho \geq 0$  assez petit (*i.e.*  $\rho$  est inférieur à un certain  $\rho_0 > 0$ ), nous considérons les coefficients constants par morceaux

$$\alpha_\rho(x) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } x \in \Omega_\rho, \\ \alpha_1 & \text{si } x \in \omega_\rho, \end{cases} \quad \beta_\rho(x) = \begin{cases} \beta_0 & \text{si } x \in \Omega_\rho, \\ \beta_1 & \text{si } x \in \omega_\rho, \end{cases} \quad (2.8)$$

et, étant données  $F_0, F_1 \in H^2(\Omega)$ , la fonction

$$F_\rho = \begin{cases} F_0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ F_1 & \text{dans } \omega_\rho. \end{cases}$$

Nous supposons de plus que, pour tout  $\rho \in [0, \rho_0[$ , le problème aux limites

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_\rho A \nabla u_\rho) + \beta_\rho u_\rho = F_\rho & \text{dans } \Omega, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.9)$$

admet une unique solution  $u_\rho \in H^1(\Omega)$ . Notons que la condition de Dirichlet sur  $\partial\Omega$  a été choisie pour fixer les idées mais ne joue aucun rôle particulier.

Afin d'utiliser la Proposition 2.1, nous commençons par écrire (2.9) sous la forme variationnelle (2.1) avec  $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ ,

$$a_\rho(u, v) = \int_\Omega \alpha_\rho A \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \beta_\rho u v \, dx, \quad (2.10)$$

$$\ell_\rho(v) = \int_\Omega F_\rho v \, dx. \quad (2.11)$$

Nous supposons dans un premier temps que la fonction coût vérifie les hypothèses (2.2), (2.3) et (2.4), et nous nous concentrons sur l'étude du comportement asymptotique des quantités définies par (2.5) et (2.6). Le point essentiel est de déterminer une approximation appropriée de l'adjoint  $v_\rho$ . Par des techniques proches de [43, 38] (où le comportement de la solution à distance de l'inclusion est étudié, voir aussi notamment [29, 58] pour des développements plus récents sur ce sujet), nous montrons que ceci est réalisé en considérant un potentiel de simple couche de densité supportée sur  $\partial\omega$ . Nous aboutissons au résultat suivant [3].

**Théorème 2.2** *Soit  $j$  une fonction coût de la forme (2.2) vérifiant (2.3) et (2.4) pour une certaine forme linéaire  $L_\rho \in H^{-1}(\Omega)$  et  $f(\rho) = \rho^N$ . Nous supposons de plus que*

$$\|L_\rho(u_0) - L_0(u_0)\|_{-1, \Omega} = o(\rho^{N/2}). \quad (2.12)$$

Alors nous avons le développement asymptotique

$$j(\rho) - j(0) = \rho^N \left[ \alpha_0 \nabla u_0(z)^T \mathcal{P}_{\omega,r} \nabla v_0(z) + (\beta_1 - \beta_0) |\omega| u_0(z) v_0(z) - |\omega| (F_1 - F_0)(z) v_0(z) + \delta J \right] + o(\rho^N). \quad (2.13)$$

Nous avons utilisé les notations

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2, \quad r = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \geq 0.$$

Lorsque  $r = 1$ , la matrice (dite de polarisation)  $\mathcal{P}_{\omega,r}$  est nulle. Sinon elle est constituée des composantes

$$(\mathcal{P}_{\omega,r})_{ij} = \int_{\partial\omega} p_i x_j ds \quad (2.14)$$

où  $x_j$  est la  $j$ -ème coordonnée du point  $x$  et la densité  $p_i$  associée au  $i$ -ème vecteur de base  $e_i$  de  $\mathbb{R}^N$  est l'unique solution de l'équation intégrale

$$\frac{r+1}{r-1} \frac{p_i(x)}{2} + \int_{\partial\omega} p_i(y) A \nabla E(x-y) \cdot n(x) ds(y) = A e_i \cdot n(x) \quad \forall x \in \partial\omega. \quad (2.15)$$

Ici,  $E$  désigne la solution élémentaire de l'opérateur  $u \mapsto -\operatorname{div}(A \nabla u)$ .

La notion de matrice de polarisation a été introduite par Polya, Schiffer et Szegő [61, 63] et a été largement étudiée depuis (voir par exemple [26, 28]). En particulier, il est établi que  $\mathcal{P}_{\omega,r}$  est symétrique définie positive si  $r > 1$ , et symétrique définie négative si  $r < 1$ . Rappelons quelques formules obtenues pour des ellipses et ellipsoïdes dans le cas du laplacien  $A = I$  [53].

1. *Ellipse.* Lorsque  $\omega$  est l'ellipse dont les axes de demi-longueurs  $a$  et  $b = ea$  sont dirigés selon les vecteurs de base (le cas général s'obtient par rotation), la matrice de polarisation s'écrit

$$\mathcal{P}_{\omega,r} = |\omega|(r-1) \begin{pmatrix} \frac{1+e}{1+re} & 0 \\ 0 & \frac{1+e}{e+r} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Nous avons en particulier pour le disque unité

$$\mathcal{P}_{\omega,r} = 2 \frac{r-1}{r+1} |\omega| I. \quad (2.17)$$

2. *Ellipsoïde.* La matrice de polarisation de l'ellipsoïde de demi-axes  $(a_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  orientés selon les vecteurs de base s'écrit

$$\mathcal{P}_{\omega,r} = |\omega| \begin{pmatrix} \frac{r-1}{1-(r-1)s_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r-1}{1-(r-1)s_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r-1}{1-(r-1)s_3} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

avec

$$s_k = -\frac{a_1 a_2 a_3}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(a_k^2 + s) \sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}} ds.$$

A l'aide du logiciel de calcul symbolique Maple, nous obtenons pour un ellipsoïde de révolution de rayon  $a_1 = a_2$  et de hauteur  $a_3 = ea_1$ ,  $e < 1$

$$s_1 = s_2 = e \frac{2e\sqrt{1-e^2} + 2 \arctan\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right) - \pi}{4(1-e^2)^{3/2}}, \quad (2.19)$$

$$s_3 = -e \frac{2\sqrt{1-e^2} + 2 \arctan\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right) - \pi}{2(1-e^2)^{3/2}}, \quad (2.20)$$

et pour la boule unité (qui se calcule évidemment beaucoup plus simplement directement)

$$\mathcal{P}_{\omega,r} = 3 \frac{r-1}{r+2} |\omega| I. \quad (2.21)$$

Notons que le théorème 2.2 se généralise aisément au cas où  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  sont constants par morceaux, à condition qu'ils soient constants au voisinage de  $z$ .

Donnons maintenant quelques exemples de fonctions coût typiques.

**Théorème 2.3** *Le développement asymptotique (2.13) est valable pour les fonctions coût suivantes, avec les valeurs indiquées de  $\delta J$ .*

1. **Exemple 1.** *Considérons une fonction coût de la forme*

$$J_\rho(u) = J(u|_{\Omega \setminus \overline{B(z,R)}}), \quad (2.22)$$

où  $R > 0$  est fixé et  $J$  est de classe  $C^2$  sur  $H^1(\Omega \setminus \overline{B(z,R)})$ . Alors  $\delta J = 0$ .

2. **Exemple 2.** *Pour la fonctionnelle*

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega} \alpha_\rho |u - u_d|^2 dx, \quad (2.23)$$

avec  $u_d \in H^2(\Omega)$ , nous avons

$$\delta J = (\alpha_1 - \alpha_0) |\omega| |u_0(z) - u_d(z)|^2.$$

3. **Exemple 3.** *Pour la fonctionnelle*

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega} \alpha_\rho A \nabla(u - u_d) \cdot \nabla(u - u_d) dx, \quad (2.24)$$

avec  $u_d \in (H_0^1 \cap H^3)(\Omega)$ , nous avons

$$\delta J = \alpha_0 \nabla u_0(z)^T \mathcal{P}_{\omega,r} (\nabla u_0(z) - \nabla u_d(z)) - (\alpha_1 - \alpha_0) |\omega| A \nabla u_d(z) \cdot (\nabla u_0(z) - \nabla u_d(z)).$$

Les théorèmes 2.2 et 2.3 se généralisent sans difficulté au cas d'un état vectoriel  $u_\rho \in \mathbb{R}^m$ . Les seuls changements sont les suivants.

- Dans chaque formule, deux vecteurs sont multipliés au sens du produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^m$ .
- Le polarisation  $\mathcal{P}_{\omega,r}$  est donnée par un tenseur d'ordre 4. Si on note  $\mathcal{P}_{pq}^{ij}$  ses composantes, nous avons par définition

$$\nabla u^T \mathcal{P}_{\omega,r} \nabla v = \sum_{i,j,p,q} \mathcal{P}_{pq}^{ij} \partial_i u_j \partial_p v_q.$$

Dans le cas du système de l'élasticité linéaire, le tenseur de polarisation est appelé *tenseur des moments élastiques* (EMT), voir [26, 28]. Nous avons pour un disque par exemple, en utilisant les notations standards de l'élasticité,

$$\nabla u^T \mathcal{P}_{\omega,r} \nabla v = \frac{r-1}{\kappa r + 1} \frac{\kappa + 1}{2} |\omega| \left[ 2\sigma(u) : e(v) + \frac{(r-1)(\kappa-2)}{\kappa + 2r - 1} \text{tr}\sigma(u) \text{tr}e(v) \right],$$

où  $u$  et  $v$  sont des champs de déplacement quelconques,  $\sigma(u)$  and  $e(v)$  sont les tenseurs des contraintes (pour un module d'Young unitaire) et des déformations associés,

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu},$$

et  $(\lambda, \mu)$  sont les coefficients de Lamé.

### 2.1.3 Extension : trou et fissure de type Neumann

Le cas où  $\omega_\rho$  est un trou avec condition de Neumann au bord s'obtient formellement en faisant tendre  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  vers 0 dans les formules précédentes. En fait, ceci peut se justifier rigoureusement en prenant exactement  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  et en adoptant une formulation appropriée pour éviter que le problème ne devienne mal posé [3]. Ainsi, il suffit de prendre  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  dans les théorèmes 2.2 et 2.3 pour obtenir les formules correspondant au trou de Neumann. La matrice de polarisation associée s'obtient en prenant pour contraste  $r = 0$ . On retrouve alors certains résultats connus [67, 44].

Le cas d'une fissure droite (en 2D) ou circulaire plane (en 3D) se déduit du trou elliptique (resp. ellipsoïdal de révolution) en faisant tendre l'un des axes vers 0. Ce passage à la limite est quant à lui purement formel. Cependant, il permet de retrouver des formules obtenues rigoureusement par ailleurs [14, 12], en utilisant une approximation de l'état adjoint par un potentiel de double couche. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\Sigma &= -\pi n \otimes n && \text{pour une fissure droite } \Sigma \text{ de longueur 2 et de normale unitaire } n \text{ (2D),} \\ \mathcal{P}_\Sigma &= -\frac{8}{3}n \otimes n && \text{pour une fissure circulaire plane } \Sigma \text{ de rayon 1 et de normale unitaire } n \text{ (3D).} \end{aligned}$$

## 2.2 Problèmes elliptiques d'ordre 2 avec trou de type Dirichlet [21, 2, 4]

Nous abordons maintenant le cas d'un trou avec condition de Dirichlet homogène sur son bord. Afin de pouvoir traiter sous le même formalisme les équations de Navier-Stokes en régime incompressible (entre autres), nous considérons un problème semi-linéaire de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u_\rho + \Phi(u_\rho) = \sigma & \text{dans } \Omega_\rho, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \partial\omega_\rho, \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $\sigma \in L^2(\Omega)$  et  $\Phi$  est une fonction différentiable, éventuellement non linéaire, vérifiant les propriétés suivantes. Par restriction à n'importe quel ouvert borné  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\Phi$  associe à tout élément de  $H^1(\mathcal{O})$  un élément de l'espace dual  $H^1(\mathcal{O})'$ . De plus, si  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 \cup (\partial\mathcal{O}_1 \cap \partial\mathcal{O}_2)$ ,  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ , alors pour tout  $u, v \in H^1(\mathcal{O})$  nous avons

$$\langle \Phi(u), v \rangle_{H^1(\mathcal{O})', H^1(\mathcal{O})} = \langle \Phi(u|_{\mathcal{O}_1}), v|_{\mathcal{O}_1} \rangle_{H^1(\mathcal{O}_1)', H^1(\mathcal{O}_1)} + \langle \Phi(u|_{\mathcal{O}_2}), v|_{\mathcal{O}_2} \rangle_{H^1(\mathcal{O}_2)', H^1(\mathcal{O}_2)}. \quad (2.26)$$

Nous supposons que le problème (2.25) admet une solution  $u_\rho \in H_0^1(\Omega_\rho)$  pour tout  $\rho$  assez petit. Nous notons

$$R_u(v) = \Phi(u + v) - \Phi(u). \quad (2.27)$$

L'analyse asymptotique topologique d'une fonction coût  $j(\rho) = J_\rho(u_\rho)$  s'appuie sur une variante de la proposition 2.1, que nous appliquons à un prolongement de  $u_\rho$  par 0 à l'intérieur du trou. Dans le cas de Dirichlet, nous devons distinguer les dimensions 2 et 3. Ceci provient de la différence de comportement à l'infini des solutions élémentaires du laplacien, toujours notées  $E$ , ce qui passait inaperçu dans la section précédente vu qu'elles intervenaient par leurs gradients. Les résultats suivants sont issus de [4]. Comme auparavant, nous énonçons des résultats généraux avant de spécifier des exemples.

### 2.2.1 Sensibilité topologique en dimension 3

L'hypothèse technique suivante porte sur la non linéarité, et sera automatiquement vérifiée lorsque  $\Phi$  est linéaire.

**Hypothèse 2.1** 1. Il existe  $\lambda > 0$  et une constante  $c > 0$  tels que pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega_\rho)$ ,  $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$  et  $u \in H^1(\Omega_\rho)$  avec  $\|u\|_{1, \Omega_\rho} < \lambda$  et  $\|f\|_{-1, \Omega_\rho}$ ,  $\|\varphi\|_{1/2, \Gamma}$  suffisamment petit, le problème

$$\begin{cases} -\Delta v + R_u(v) = f & \text{in } \Omega_\rho, \\ v = \varphi & \text{on } \Gamma, \\ v = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho, \end{cases} \quad (2.28)$$

admet une unique solution vérifiant

$$\|v\|_{1,\Omega_\rho} \leq c(\|f\|_{-1,\Omega_\rho} + \|\varphi\|_{1/2,\Gamma}).$$

2. Il existe une constante  $c' > 0$  telle que pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  avec  $\|v\|_{1,\Omega}$  suffisamment petit,

$$\|R_{u_0}(v)\|_{-1,\Omega} \leq c'(\|v\|_{0,\Omega} + \|v\|_{1,\Omega}^2).$$

3. Si  $u$  est de classe  $C^2$ , alors  $\Phi(u)$  est de classe  $C^0$ .

4. Lorsque  $\|v\|_{1,\Omega}$  tend vers zero,  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons

$$\langle R_{u_0}(v) - DR_{u_0}(0)v, v_0 \rangle = o(\|v\|_{0,\Omega} + \|v\|_{1,\Omega}^2).$$

Le résultat général est énoncé ci-dessous.

**Théorème 2.4** *Supposons que*

- la fonction  $\Phi$  vérifie l'hypothèse 2.1 et  $\|u_0\|_{1,\Omega} < \lambda$ ,
- la fonction coût vérifie

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho) = \rho\delta J_1 + o(\rho), \quad (2.29)$$

$$J_0(u_\rho) - J_0(u_0) - \langle L, u_\rho - u_0 \rangle = \rho\delta J_2 + o(\rho), \quad (2.30)$$

avec  $L \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\delta J_1, \delta J_2 \in \mathbb{R}$ ,

- le problème adjoint :

$$\begin{cases} -\Delta v_0 + D\Phi(u_0)^*v_0 = -L & \text{in } \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (2.31)$$

a au moins une solution  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,

- les états directs et adjoints  $u_0$  et  $v_0$  sont de classe  $C^2$  au voisinage de  $z$ ,
- le coefficient  $\mathcal{Q}_\omega$  est défini par

$$\mathcal{Q}_\omega = \int_{\partial\omega} \eta ds, \quad (2.32)$$

où  $\eta \in H^{-1/2}(\partial\omega)$  est l'unique solution de l'équation intégrale

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y) = 1 \quad \forall x \in \partial\omega. \quad (2.33)$$

Alors nous avons

$$j(\rho) - j(0) = \rho[\mathcal{Q}_\omega u_0(z)v_0(z) + \delta J_1 + \delta J_2] + o(\rho). \quad (2.34)$$

Notons que la fonction  $\Phi$  n'est pas présente explicitement dans la formule (2.34), ni dans la définition de  $\mathcal{Q}_\omega$ .

## 2.2.2 Sensibilité topologique en dimension 2

En dimension 2, nous allons voir que les choses sont assez différentes, à commencer par les hypothèses.

**Hypothèse 2.2** 1. Il existe  $p \in ]1, 2[$  et  $q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\Phi$  envoie  $W^{1,p}(\mathcal{O})$  dans  $L^q(\mathcal{O})$  pour tout ouvert borné  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^2$ .

2. Il existe  $\lambda > 0$  et une constante  $c > 0$  tels que, pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega_\rho)$ ,  $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$  et  $u \in W^{1,p}(\Omega_\rho)$  avec  $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\rho)} < \lambda$  et  $\|f\|_{-1,\Omega_\rho}$ ,  $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}$  assez petit, le problème

$$\begin{cases} -\Delta v + R_u(v) = f & \text{in } \Omega_\rho, \\ v = \varphi & \text{on } \Gamma, \\ v = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho, \end{cases} \quad (2.35)$$

a une unique solution vérifiant

$$\|v\|_{1,\Omega_\rho} \leq c(\|f\|_{-1,\Omega_\rho} + \|\varphi\|_{1/2,\Gamma}).$$

3. Il existe une constante  $c' > 0$  telle que pour tout ouvert  $\mathcal{O} \subset \Omega$  et tout  $u, v \in W^{1,p}(\mathcal{O})$  avec  $\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} \leq \lambda$  et  $\|v\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})}$  assez petit,

$$\|R_u(v)\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq c'\|v\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})}.$$

4. Lorsque  $\|v\|_{1,\Omega}$  tend vers zero,  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ , nous avons

$$\langle R_{u_0}(v) - DR_{u_0}(0)v, v_0 \rangle = o(\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}).$$

Nous avons le résultat suivant.

**Théorème 2.5** *Supposons que*

- la fonction  $\Phi$  vérifie l'hypothèse 2.2 et  $\|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \lambda$ ,
- la fonction coût vérifie

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho) = \frac{-1}{\log \rho} \delta J_1 + o\left(\frac{-1}{\log \rho}\right), \quad (2.36)$$

$$J_0(u_\rho) - J_0(u_0) - \langle L, u_\rho - u_0 \rangle = \frac{-1}{\log \rho} \delta J_2 + o\left(\frac{-1}{\log \rho}\right), \quad (2.37)$$

avec  $L \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\delta J_1, \delta J_2 \in \mathbb{R}$ ,

- le problème adjoint (2.31) a au moins une solution  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,
- les états directs et adjoints  $u_0$  et  $v_0$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $z$ .

Alors

$$j(\rho) - j(0) = \frac{-1}{\log \rho} [2\pi u_0(0)v_0(0) + \delta J_1 + \delta J_2] + o\left(\frac{-1}{\log \rho}\right). \quad (2.38)$$

Ici encore la non linéarité n'est pas présente explicitement. Observons un autre fait remarquable, propre à la dimension 2 : la forme du trou n'intervient pas, du moins dans le premier terme.

### 2.2.3 Généralisation à d'autres opérateurs différentiels

Les résultats précédents se généralisent sans aucune difficulté au cas où le laplacien est remplacé par un opérateur différentiel  $\tilde{\Delta}$  convenable, c'est à dire satisfaisant les propriétés suivantes.

**Hypothèse 2.3** *Pour tout ouvert borné  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\tilde{\Delta}$  est défini (au sens faible) par*

$$\tilde{\Delta} : \begin{array}{ll} \mathcal{V}(\mathcal{O}) & \rightarrow \mathcal{V}_0(\mathcal{O})' \\ u & \mapsto \operatorname{div}(A\nabla u), \end{array}$$

où

- $\mathcal{V}(\mathcal{O})$  est un sous-espace fermé de  $H^1(\mathcal{O})^n$ ,  $n \geq 1$ ,
- $\mathcal{V}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})^n$ ,
- $A$  est un tenseur d'ordre 4 tel que

$$AX : X \geq cX : X, \quad \forall X \in \mathcal{M}_{N,n}(\mathbb{R}),$$

- la solution élémentaire de  $\tilde{\Delta}$  vérifie

$$E(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad \text{en } 3D,$$

$$E(x) \sim -m_2 \frac{\log|x|}{2\pi} I, \quad (|x| \rightarrow 0) \quad \text{en } 2D,$$

où  $m_2 \in \mathbb{R}^*$  et  $I$  est la matrice identité d'ordre  $n$ .

Pour un tel opérateur agissant sur un champ vectoriel, le scalaire  $\mathcal{Q}_\omega$  doit être remplacé par la matrice  $n \times n$  de l'application linéaire

$$X \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathcal{Q}_\omega X = \int_{\partial\omega} \eta ds,$$

la densité  $\eta$  étant l'unique solution de l'équation intégrale

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y) = X \quad \forall x \in \partial\omega. \quad (2.39)$$

Cette matrice est appelée matrice capacité.

Alors, sous les hypothèses des théorèmes 2.4 et 2.5 satisfaites en remplaçant  $\Delta$  par  $\tilde{\Delta}$ ,  $H^1(\mathcal{O})$  par  $\mathcal{V}(\mathcal{O})$  et  $H_0^1(\mathcal{O})$  par  $\mathcal{V}_0(\mathcal{O})$ , nous avons les formules asymptotiques :

$$j(\rho) - j(0) \sim \rho [\mathcal{Q}_\omega u_0(z) \cdot v_0(z) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}] \quad \text{en 3D}, \quad (2.40)$$

$$j(\rho) - j(0) \sim \frac{-1}{\log \rho} \left[ \frac{2\pi}{m_2} u_0(z) \cdot v_0(z) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2} \right] \quad \text{en 2D}. \quad (2.41)$$

Si l'état  $u_\rho$  est à valeurs complexes, ce qui signifie que l'espace de Hilbert  $\mathcal{V}(\mathcal{O})$  est complexe, les résultats précédents se généralisent en identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ . Cela conduit à la modification suivante (voir [21]) : le produit scalaire  $a \cdot b$  dans les formules (2.40) and (2.41) est remplacé par  $\Re(a \cdot b)$ , où le point désigne maintenant le produit scalaire hermitien de  $\mathbb{C}^n$ .

Nous donnons dans les tableaux 2.1 des exemples d'opérateurs différentiels  $\tilde{\Delta}$  satisfaisant les hypothèses 2.3 et de fonctions  $\Phi$  vérifiant les hypothèses 2.1 en dimension 3 and 2.2 en dimension 2. Pour les fonctions linéaires, la vérification est immédiate. Pour les équations de Navier-Stokes (en régime incompressible), voir [2]. Nous indiquons dans le tableau 2.2 le coefficient  $m_2$  correspondant.

Système	$\tilde{\Delta}u$	$\mathcal{V}(\mathcal{O})$	$\Phi(u)$
Laplace/ Helmholtz (non linéaire)	$\Delta u$	$H^1(\mathcal{O})^n$	$-k^2(1 + \epsilon u ^{2s})u$
élasticité linéaire / élastodynamique	$\text{div } \sigma(u)$	$H^1(\mathcal{O})^N$	$-k^2 u$
Stokes / quasi-Stokes, Navier-Stokes	$\nu \Delta u$	$\{u \in H^1(\mathcal{O})^N, \text{div } u = 0\}$	$\alpha u, \nabla u \cdot u$

TABLE 2.1 – Exemples d'opérateurs.

Système	$E(x)$	$m_2$
Laplace/ Helmholtz (non linéaire)	$\frac{-1}{2\pi} \ln r I$	1
élasticité linéaire / élastodynamique	$\frac{-(\lambda + 3\mu) \log r I + (\lambda + \mu) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}$	$\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}$
Stokes / quasi-Stokes, Navier-Stokes	$\frac{-\log r I + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T}{4\pi\nu}$	$\frac{1}{2\nu}$

TABLE 2.2 – Solution élémentaire et coefficient  $m_2$  (2D).

## 2.2.4 Trou sphérique (3D)

Le cas du trou sphérique  $\omega = B(0, 1)$  a évidemment un intérêt particulier, d'autant que le calcul de sa matrice capacité est quasi-immédiat. Nous supposons pour cela que la solution élémentaire de  $\tilde{\Delta}$  est de la forme

$$E(x) = \frac{\alpha I + \beta \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T}{4\pi r}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Un simple calcul donne

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)ds(y) = m_3 I \quad \forall x \in \partial\omega,$$

$$\text{avec } m_3 = \alpha + \frac{\beta}{3}.$$

Dans ce cas, pourvu que  $m_3 \neq 0$ , la solution de (2.39) est la constante  $\eta = m_3^{-1}X$  et la matrice capacité s'écrit

$$\mathcal{Q}_{B(0,1)} = \frac{4\pi}{m_3}I.$$

Le tableau 2.3 rassemble les valeurs de  $m_3$  correspondant aux opérateurs du tableau 2.1. Dans les cas linéaires, on retrouve de façon systématique des résultats connus [44, 45, 46, 47, 54, 62].

PDE system	$E(x)$	$m_3$
Laplace/ Helmholtz (non linéaire)	$\frac{1}{4\pi r} I$	1
élasticité linéaire / élastodynamique	$\frac{(\lambda + 3\mu)I + (\lambda + \mu)\mathbf{e}_r\mathbf{e}_r^T}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r}$	$\frac{2\lambda + 5\mu}{3\mu(\lambda + 2\mu)}$
Stokes/quasi-Stokes, Navier-Stokes	$\frac{I + \mathbf{e}_r\mathbf{e}_r^T}{8\pi\nu r}$	$\frac{2}{3\nu}$

TABLE 2.3 – Solution élémentaire et coefficient  $m_3$  (3D).

## 2.2.5 Exemples de fonctions coût

**Théorème 2.6** *Pour les fonctionnelles suivantes et un opérateur  $\tilde{\Delta}$  vérifiant les hypothèses 2.3, sous l'hypothèse 2.1 en 3D (resp. l'hypothèse 2.2 in 2D), les équations (2.29) et (2.30) sont vérifiées avec  $f(\rho) = \rho$  (resp.  $f(\rho) = -1/\log \rho$ ) et les valeurs de  $\delta J_1$  et  $\delta J_2$  indiquées.*

1. Si la fonction coût est de la forme

$$J_\rho(u) = J(u|_{\Omega \setminus \overline{B(z,R)}}), \quad R > 0,$$

alors  $\delta J_1 = \delta J_2 = 0$ .

2. Pour la fonctionnelle

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} |u - u_d|^2 dx$$

où  $u_d \in L^2(\Omega)^n \cap L^p(B(0,R))^n$ ,  $p > N$ ,  $R > 0$ , nous avons  $\delta J_1 = \delta J_2 = 0$ .

3. Pour la fonctionnelle

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} |A\nabla(u - u_d)|^2 dx$$

où  $u_d \in \mathcal{V}(\Omega) \cap W^{1,p}(B(0,R))^n$ ,  $p > N$ ,  $R > 0$ , nous avons

$$\delta J_1 = 0 \quad \text{et} \quad \delta J_2 = \begin{cases} \mathcal{Q}_\omega u_0(z) \cdot u_0(z) & \text{en } 3D, \\ \frac{2\pi}{m_2} u_0(z) \cdot u_0(z) & \text{en } 2D. \end{cases}$$

## 2.3 Problèmes paraboliques et hyperboliques [18]

Nous revenons à une perturbation de type inclusion ou trou de Neumann mais pour des problèmes instationnaires. Plus précisément, la perturbation en question est infinitésimale en espace mais constante en temps. Ainsi, la variation du lagrangien liée à la perturbation de la partie elliptique de l'opérateur s'obtiendra formellement par sommation de cette variation correspondant à des tranches de temps infinitésimales. Pour simplifier, la présentation est faite pour une inclusion, mais le cas du trou s'obtient de manière similaire. Etant donné que la lettre  $\rho$  désignera la densité, la taille de l'inclusion sera notée  $\varepsilon$ .



### 2.3.1 Problèmes paraboliques

Soit  $A$  une matrice symétrique définie positive et  $\alpha_0, \alpha_1, \rho_0, \rho_1$  des réels strictement positifs. Pour tout  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ , avec  $\varepsilon_0$  suffisamment petit, nous considérons les coefficients constants par morceaux

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} \alpha_1 & \text{dans } \omega_\varepsilon \\ \alpha_0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon} \end{cases}, \quad \rho_\varepsilon = \begin{cases} \rho_1 & \text{dans } \omega_\varepsilon \\ \rho_0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon} \end{cases}.$$

Etant donnés  $F_0, F_1 \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ , nous définissons la fonction

$$F_\varepsilon = \begin{cases} F_1 & \text{dans } \omega_\varepsilon \times (0, T), \\ F_0 & \text{dans } (\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}) \times (0, T). \end{cases}$$

Nous nous intéressons à l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla u_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.42)$$

La formulation variationnelle s'écrit

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) dt = \int_0^T \ell_\varepsilon(v) dt \quad \forall v \in X, \quad (2.43)$$

avec les espaces

$$X = L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

$$X_0 = \{u \in X, u(\cdot, 0) = 0\} \ni u_\varepsilon,$$

et les formes bilinéaires et linéaires  $a_\varepsilon$  et  $\ell_\varepsilon$  définies sur  $H_0^1(\Omega)$  par

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \alpha_\varepsilon A \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (2.44)$$

$$\ell_\varepsilon(v) = \int_\Omega F_\varepsilon v dx. \quad (2.45)$$

Nous considérons une fonction coût de la forme

$$j(\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_0^T J_\varepsilon(u_\varepsilon) dt \quad (2.46)$$

où  $J_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et les hypothèses suivantes sont supposées vérifiées :

$$J_\varepsilon(u) \in L^1(0, T) \quad \forall u \in X, \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \quad (2.47)$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_0) + \int_0^T \langle L_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0 \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \varepsilon^N \delta \mathcal{J}_1 + o(\varepsilon^N), \quad (2.48)$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_0) = \mathcal{J}_0(u_0) + \varepsilon^N \delta \mathcal{J}_2 + o(\varepsilon^N), \quad (2.49)$$

$$\|L_\varepsilon - L_0\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))} = o(\varepsilon^{N/2}), \quad (2.50)$$

avec  $L_\varepsilon, L_0 \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \in \mathbb{R}$ . Nous introduisons l'état adjoint  $v_\varepsilon \in X$  solution de

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_\varepsilon(v_\varepsilon, v) dt = - \int_0^T L_\varepsilon v dt \quad \forall v \in X_0, \quad (2.51)$$

c'est à dire vérifiant l'équation de la chaleur rétrograde

$$\begin{cases} -\rho_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla v_\varepsilon) = -L_\varepsilon & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon(\cdot, T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.52)$$

Nous établissons le résultat suivant.

**Théorème 2.7** *Supposons que la fonction coût vérifie (2.46)-(2.50). Supposons de plus que  $u_0$  et  $v_0$  vérifient respectivement (2.42) et (2.52) pour  $\varepsilon = 0$  et que  $F_0, F_1$  et  $L_0$  sont suffisamment réguliers au voisinage de  $z$ . Alors nous avons le développement asymptotique :*

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^N \left[ (\rho_1 - \rho_0)|\omega| \int_0^T \frac{\partial u_0}{\partial t}(z, t) v_0(z, t) dt + \alpha_0 \int_0^T \nabla u_0(z, t) \cdot \mathcal{P}_{\omega, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}} \nabla v_0(z, t) dt - |\omega| \int_0^T (F_1(z, t) - F_0(z, t)) v_0(z, t) dt + \delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2 \right] + o(\varepsilon^N). \quad (2.53)$$

Dans cette expression,  $\mathcal{P}_{\omega, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}}$  est la matrice de polarisation introduite au théorème 2.2.

Les questions de régularité sont traitées en détail dans [18]. Nous indiquons maintenant quelques exemples de fonctions coût, d'autres exemples sont fournis dans [18].

**Proposition 2.8** *Le développement asymptotique (2.53) est valable pour les fonctions coût suivantes avec les valeurs de  $\delta \mathcal{J}_1$  et  $\delta \mathcal{J}_2$  indiquées.*

1. *Pour la fonctionnelle*

$$J_\varepsilon(u) = \int_\Omega |u - u_d|^2 dx \quad (2.54)$$

avec  $u_d \in L^2(\Omega) \cap H^4(B(z, R))$ ,  $R > 0$ , nous avons  $\delta \mathcal{J}_1 = \delta \mathcal{J}_2 = 0$ .

2. *Pour la fonctionnelle*

$$J_\varepsilon(u) = \int_\Omega \eta(x) A \nabla(u - u_d) \cdot \nabla(u - u_d) dx \quad (2.55)$$

avec  $u_d \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et  $\eta$  une fonction régulière dont le support ne contient pas  $z$ , nous avons  $\delta \mathcal{J}_1 = \delta \mathcal{J}_2 = 0$ .

## 2.3.2 Problèmes hyperboliques

Avec les mêmes notations que précédemment, nous considérons maintenant l'équation des ondes :

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla u_\varepsilon) = F_\varepsilon & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u_\varepsilon(\cdot, 0) = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.56)$$

La formulation variationnelle associée peut s'écrire dans les espaces

$$X = \mathcal{C}([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \quad (2.57)$$

$$X_0 = \left\{ u \in X, u(\cdot, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 \right\} \ni u_\varepsilon,$$

sous la forme

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) dt = \int_0^T \ell_\varepsilon(v) dt \quad \forall v \in X, \quad (2.58)$$

avec les formes bilinéaire et linéaire  $a_\varepsilon$  et  $\ell_\varepsilon$  définies par (2.44) et (2.45). Nous considérons une fonction coût du type (2.46) vérifiant (2.47), (2.48), (2.49) avec  $L_\varepsilon, L_0 \in W^{1,1}(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et

$$\|L_\varepsilon - L_0\|_{W^{1,1}(0, T; H^{-1}(\Omega))} = o(\varepsilon^{N/2}). \quad (2.59)$$

L'état adjoint  $v_\varepsilon \in X$  est défini en tant que solution de :

$$\int_0^T \left\langle \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, v_\varepsilon \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt + \int_0^T a_\varepsilon(\varphi, v_\varepsilon) dt = - \int_0^T L_\varepsilon \varphi dt \quad \forall \varphi \in X_0, \quad (2.60)$$

c'est à dire,

$$\begin{cases} \rho_\varepsilon \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\alpha_\varepsilon A \nabla v_\varepsilon) = -L_\varepsilon & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ v_\varepsilon(\cdot, T) = \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(\cdot, T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.61)$$

Nous obtenons le comportement asymptotique suivant.

**Théorème 2.9** *Supposons que  $\mathcal{J}_\varepsilon$  vérifie (2.46)-(2.49) et (2.59). Supposons de plus que  $u_0$  et  $v_0$  vérifient respectivement (2.56) et (2.61) pour  $\varepsilon = 0$ , et que  $F_0$ ,  $F_1$  et  $L_0$  sont suffisamment réguliers au voisinage de  $z$ . Alors nous avons le développement asymptotique :*

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^N & \left[ -(\rho_1 - \rho_0)|\omega| \int_0^T \frac{\partial u_0}{\partial t}(z, t) \frac{\partial v_0}{\partial t}(z, t) dt + \alpha_0 \int_0^T \nabla u_0(z, t) \cdot \mathcal{P}_{\omega, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}} \nabla v_0(z, t) dt \right. \\ & \left. - |\omega| \int_0^T (F_1(z, t) - F_0(z, t)) v_0(z, t) dt + \delta \mathcal{J}_1 + \delta \mathcal{J}_2 \right] + o(\varepsilon^N). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Nous renvoyons à [18] pour des exemples de fonctions coût.

## 2.4 Un problème elliptique d'ordre 4 [17]

Pour terminer ce chapitre nous étudions un problème elliptique d'ordre 4, à savoir l'équation des plaques de Kirchhoff. La particularité d'un problème d'ordre 4 est que la capacité d'un point est non nulle. Ainsi la solution, donc a priori la fonction coût, peut varier discontinûment dès que l'on crée un trou ponctuel de Dirichlet, ce qui rend la dérivée topologique non définie. Cependant, comme nous allons le voir, la situation est différente pour une inclusion ou un trou de Neumann.

La plaque en question est représenté par le domaine plan  $\Omega \subset D$ . L'équation d'état pour le problème non perturbé est la suivante : trouver  $u_\Omega \in \mathcal{V}_{h,g}$  tel que

$$\int_D \gamma_\Omega \mathcal{M}(u_\Omega) \cdot \nabla \nabla \varphi dx = \int_{\Gamma_{N_q}} q \varphi ds + \int_{\Gamma_{N_m}} m \partial_n \varphi ds + \sum_{i=1}^N Q_i \varphi(x_{v_i}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{0,0}. \quad (2.63)$$

Ci-dessus,  $\mathcal{V}_{h,g}$  est l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles, et  $\mathcal{V}_{0,0}$  est l'espace des variations admissibles, respectivement définis par

$$\mathcal{V}_{h,g} := \left\{ u \in H^2(D) : u|_{\Gamma_{D_h}} = h \text{ et } \partial_n u|_{\Gamma_{D_g}} = g \right\}, \quad (2.64)$$

$$\mathcal{V}_{0,0} := \left\{ \varphi \in H^2(D) : \varphi|_{\Gamma_{D_h}} = 0 \text{ et } \partial_n \varphi|_{\Gamma_{D_g}} = 0 \right\}. \quad (2.65)$$

La fonction  $u_\Omega$  est le déplacement transversal (ou déflexion) de la plaque. Les bords de Dirichlet et de Neumann son respectivement les paires  $(\Gamma_{D_h}, \Gamma_{D_g})$  et  $(\Gamma_{N_m}, \Gamma_{N_q})$ , tels que  $\Gamma_{D_h} \cap \Gamma_{N_q} = \emptyset$  et  $\Gamma_{D_g} \cap \Gamma_{N_m} = \emptyset$  avec  $\Gamma_{D_h}$  et  $\Gamma_{D_g}$  de mesure non nulle. Sur  $\Gamma_{D_h}$  et  $\Gamma_{D_g}$  sont respectivement prescrits un déplacement  $h \in H^{3/2}(\Gamma_{D_h})$  et une rotation  $g \in H^{1/2}(\Gamma_{D_g})$ . Le système de forces compatibles avec les hypothèses de Kirchhoff est donné par  $q \in H^{3/2}(\Gamma_{N_q})'$ ,  $m \in H^{-1/2}(\Gamma_{N_m})$  et  $Q_i \in \mathbb{R}$ . Les distributions  $q$  et  $m$  représentent un cisaillement transverse et un moment, respectivement prescrits sur  $\Gamma_{N_q}$  et  $\Gamma_{N_m}$ . Finalement,  $Q_i$  est un cisaillement transverse concentré au point  $x_{v_i} \in \Gamma_{N_q}$ , et  $N$  est le nombre de ces points. Le module d'Young  $\gamma_\Omega$  est constant par morceaux, de valeurs :

$$\gamma_\Omega = \begin{cases} \gamma_{in} & \text{dans } \Omega, \\ \gamma_{out} & \text{dans } D \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (2.66)$$

avec  $\gamma_{in} > 0$  et  $\gamma_{out} \geq 0$ . Lorsque  $\gamma_{out} = 0$ , seules les valeurs de  $u_\Omega$  dans  $\Omega$  doivent être considérées dans la fonction coût. Le moment résultant  $\mathcal{M}(u_\Omega)$ , normalisé à un module d'Young unitaire, est relié au déplacement par la loi de Hooke :

$$\mathcal{M}(u) = k\mathbb{C}\nabla\nabla u, \quad (2.67)$$

avec

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda(I \otimes I) \quad (2.68)$$

le tenseur d'élasticité, et

$$k = \frac{\tau^3}{12}. \quad (2.69)$$

Ici,  $I$  et  $\mathbb{I}$  sont respectivement les tenseurs identités d'ordre 2 et 4,  $\tau$  est l'épaisseur de la plaque et les coefficients de Lamé  $\mu$  et  $\lambda$  sont donnés par

$$\mu = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{\nu}{1-\nu^2}, \quad (2.70)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson. De plus, afin de garantir l'existence et l'unicité d'une solution de (2.63), nous supposons que :

- $\text{mes}(\Gamma_{D_g} \cap \Gamma_{D_h}) \neq 0$  ou  $\Gamma_{D_g}$  n'est pas droit ou  $\Gamma_{D_h}$  n'est pas droit ;
- lorsque  $\gamma_{out} = 0$ , les ensembles  $\Gamma_{D_g}$ ,  $\Gamma_{D_h}$ ,  $\Gamma_{N_m}$  et  $\Gamma_{N_q}$  sont des parties de  $\partial\Omega$ .

Pour faciliter le calcul du tenseur de polarisation, nous nous restreignons à des inclusions circulaires :  $\omega_\varepsilon = B(z, \varepsilon)$ ,

$$\Omega_\varepsilon = \begin{cases} \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon} & \text{si } z \in \Omega, \\ (\Omega \cup \omega_\varepsilon) \cap D & \text{si } z \in D \setminus \overline{\Omega}. \end{cases} \quad (2.71)$$

Nous notons pour simplifier  $(u_{\Omega_\varepsilon}, \gamma_{\Omega_\varepsilon})$  par  $(u_\varepsilon, \gamma_\varepsilon)$  et  $(u_\Omega, \gamma_\Omega)$  par  $(u_0, \gamma_0)$ . Alors, pour tout  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\gamma_\varepsilon$  vaut :

$$\gamma_\varepsilon = \begin{cases} \gamma_0 & \text{dans } D \setminus \overline{\omega_\varepsilon}, \\ \gamma_1 & \text{dans } \omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.72)$$

où  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont des fonctions constantes par morceaux, constantes au voisinage de  $z$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , l'état  $u_\varepsilon \in \mathcal{V}_{h,g}$  est solution de :

$$\int_D \gamma_\varepsilon \mathcal{M}(u_\varepsilon) \cdot \nabla \nabla \varphi \, dx = \int_{\Gamma_{N_q}} q \varphi \, ds + \int_{\Gamma_{N_m}} m \partial_n \varphi \, ds + \sum_{i=1}^N Q_i \varphi(x_{v_i}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{0,0}. \quad (2.73)$$

Nous considérons une fonction coût  $J_\varepsilon : H^2(D) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes : il existe  $L_\varepsilon \in \mathcal{V}'_{0,0}$ ,  $\delta J_1, \delta J_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J_\varepsilon(u_0) + \langle L_\varepsilon, u_\varepsilon - u_0 \rangle + \pi \varepsilon^2 \delta J_1 + o(\varepsilon^2), \quad (2.74)$$

$$J_\varepsilon(u_0) = J_0(u_0) + \pi \varepsilon^2 \delta J_2 + o(\varepsilon^2). \quad (2.75)$$

$$\langle L_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_D \gamma_\varepsilon (b\varphi + \mathcal{B} \cdot \nabla \nabla \varphi) \, dx + \langle L, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{0,0}, \quad (2.76)$$

où  $L \in \mathcal{V}'$ ,  $b \in L^2(D)$  est un champ scalaire et  $\mathcal{B} \in L^2(D)$  est un champ tensoriel d'ordre 2. Nous supposons de plus que  $\langle L, \varphi \rangle$  ne dépend pas des valeurs de  $\varphi$  dans un voisinage de  $z$ . Nous définissons les coefficients

$$\gamma = \gamma_1(z)/\gamma_0(z),$$

$$\xi = \frac{1+\nu}{1-\nu}, \quad \eta = \frac{1-\nu}{3+\nu}, \quad (2.77)$$

$$\rho = \frac{\gamma-1}{1+\gamma\eta}, \quad \mathbb{T} = \eta\mathbb{I} + \frac{1}{2} \frac{\xi-\eta}{1+\gamma\xi} I \otimes I. \quad (2.78)$$

Nous établissons le résultat suivant.

**Théorème 2.10** *Soit  $J_\varepsilon$  une fonction coût vérifiant (2.74)-(2.76). Nous supposons que  $b$  et  $\mathcal{B}$  sont suffisamment réguliers au voisinage de  $z$ . Alors  $J_\varepsilon(u_\varepsilon)$  admet le développement asymptotique*

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_0(u_0) = \pi \varepsilon^2 D_T J_\Omega(z) + o(\varepsilon^2),$$

avec

$$D_T J_\Omega = (\gamma_1 - \gamma_0) [(\mathbb{I} - \rho\mathbb{T})\mathcal{M}(u_0) \cdot \nabla \nabla v_0 - \rho\mathbb{T}\mathcal{B}(u_0) \cdot \nabla \nabla u_0] + \delta J_1 + \delta J_2. \quad (2.79)$$

La fonction  $u_0 = u_\Omega$  est la solution de (2.63) et  $v_0 = v_\Omega \in \mathcal{V}_{0,0}$  est l'état adjoint solution de

$$\int_D \gamma_0 \mathcal{M}(v_0) \cdot \nabla \nabla \varphi \, dx = -\langle L_0(u_0), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_{0,0}. \quad (2.80)$$

La formule (2.79) est valable pour tout  $z \in D \setminus \partial\Omega$  ( $z \in \Omega$  si  $\gamma_{out} = 0$ ).

Voici un exemple simple de fonction coût, voir [17] pour d'autres cas.

**Proposition 2.11** *Considérons une fonction coût de la forme*

$$J_\varepsilon(u) := J(u|_{\tilde{D}}),$$

où  $\tilde{D}$  est un ouvert de  $D$  ( $\Omega$  si  $\gamma_{out} = 0$ ) qui ne rencontre pas un voisinage de  $z$ . Nous supposons que  $J$  vérifie

$$J(u_0|_{\tilde{D}} + \varphi) - J(u_0|_{\tilde{D}}) = \langle L, \varphi \rangle + O(\|\varphi\|_{H^2(\tilde{D})}^2) \quad \forall \varphi \in \tilde{\mathcal{V}},$$

avec  $\tilde{\mathcal{V}} = \{u|_{\tilde{D}}, u \in \mathcal{V}\}$  and  $L(u_0) \in \tilde{\mathcal{V}}'$ . Nous posons

$$\langle L_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle L_0, \varphi \rangle = \langle L, \varphi|_{\tilde{D}} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Alors les hypothèses du théorème 2.10 sont vérifiées avec

$$\mathcal{B}(u_0) = 0, \quad \delta J_1 = \delta J_2 = 0.$$

## Chapitre 3

# Méthodes de type gradient pour l'optimisation topologique

### 3.1 Algorithmes élémentaires

#### 3.1.1 Détection de défauts par visualition de la dérivée topologique [14, 12]

La façon la plus simple d'utiliser la dérivée topologique est de représenter graphiquement son champ et de l'interpréter visuellement, sans chercher à itérer. Cette manière de faire convient particulièrement bien à des problèmes de détection, car l'absence d'itération rend cette approche remarquablement robuste par rapport à la présence de bruit dans les données. Signalons que des techniques de reconstruction basées sur l'analyse asymptotique des solutions par rapport à l'insertion de petites inclusions ont également été développées par différents auteurs, voir par exemple [38, 26, 27, 28]. A la différence de ces travaux, notre emploi systématique de l'état adjoint permet l'utilisation de fonctions coûts générales.

Nous présentons ici un problème de détection d'inclusions dans des plaques métalliques à l'aide de mesures ultrasonores [12]. Le modèle est celui de l'élastodynamique linéaire :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(u) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où  $\rho$  est la masse volumique,  $u$  est le champ de déplacements, et  $\sigma(u)$  le tenseur des contraintes. Nous considérons la fonction coût de moindres carrées

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\Gamma_m} |u - u_m|^2 dx \right) dt,$$

où  $\Gamma_m$  est la partie de  $\partial\Omega$  sur laquelle est effectuée la mesure  $u_m$  (bord inférieur sur la figure 3.1). L'excitation est un pulse émis à  $t = 0$  au niveau de  $\Gamma_m$ . Les défauts à détecter sont des inclusions de module d'Young proche de zéro. Le champ de dérivée topologique (valeurs négatives en bleu) avec différents niveaux de bruit sur les mesures est représenté à la figure 3.1.

#### 3.1.2 Insertion itérative d'obstacles [2]

L'utilisation la plus naturelle de la dérivée topologique consiste à insérer de petits trous (ou obstacles) en des endroits où celle-ci est négative. Pour illustrer cette procédure, nous considérons un problème d'optimisation d'écoulement dans une cuve de décantation. La fonction coût est

$$J(u) = \int_{\Omega_d} |u - u_d|^2 dx,$$

où  $u_d$  est un écoulement cible et  $\Omega_d$  une partie du domaine de calcul (voir figure 3.2). L'écoulement  $u$  est calculé par les équations de Navier-Stokes en régime incompressible. A chaque itération, un

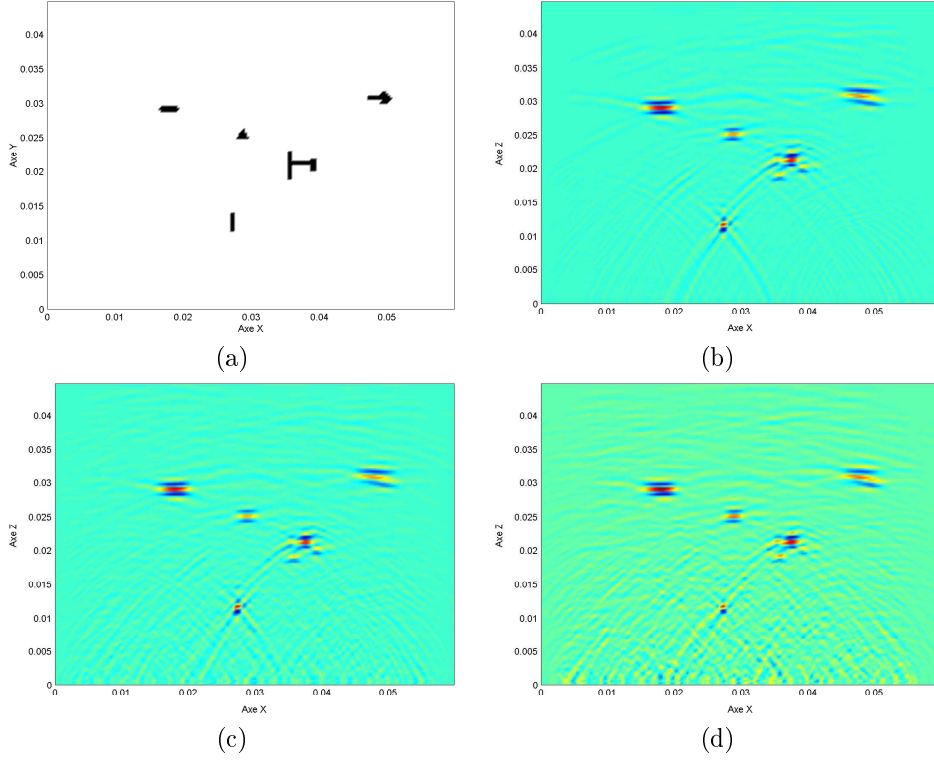


FIGURE 3.1 – Détection de défauts multiples. (a) Positions des défauts, (b)-(d) Niveaux de la dérivée topologique (b) sans bruit, (c) avec 5% de bruit, (d) avec 10% de bruit.

obstacle de taille prédéfinie est inséré là où la dérivée topologique atteint son minimum. Notons que cette méthode fonctionne essentiellement à faible nombre de Reynolds (ici de l'ordre de l'unité), car sinon l'insertion d'un obstacle de taille finie perturbe l'écoulement de façon trop importante. En effet, pour que l'approximation au premier ordre soit exploitable, il faut que les obstacles insérés soient petits par rapport aux tourbillons qu'ils génèrent, ce qui, dans cet exemple, devient trop restrictif dès que le Reynolds dépasse l'unité.

### 3.2 Lien entre méthodes d'interpolation et dérivée topologique [9]

Revenons à un problème général d'optimisation de domaines de type (1.1). Supposons que nous ayons à disposition des développements asymptotiques topologiques signés de la forme

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{B(z, \rho)}) - \mathcal{J}(\Omega) = -f(\rho)g_{\Omega}(z) + o(f(\rho)) \quad \forall z \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{J}(\Omega \cup B(z, \rho)) - \mathcal{J}(\Omega) = f(\rho)g_{\Omega}(z) + o(f(\rho)) \quad \forall z \in \Omega^c. \quad (3.2)$$

Alors une condition nécessaire d'optimalité *topologique* est

$$\begin{aligned} g_{\Omega}(z) &\leq 0 & \forall z \in \Omega, \\ g_{\Omega}(z) &\geq 0 & \forall z \in \Omega^c. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Les méthodes d'interpolation consistent à remplacer l'inconnue  $\Omega$  par un champ scalaire que nous noterons  $\gamma$  représentant une densité de matière et qui pourra, par exemple, être censé approcher la fonction caractéristique de  $\Omega$ . Le principe est alors d'autoriser les valeurs intermédiaires est d'utiliser des algorithmes d'optimisation continue. On construit pour ce faire une fonction coût étendue notée  $J$  telle que

$$J(\gamma) = \mathcal{J}(\Omega) \quad \text{si } \gamma = \chi_{\Omega}. \quad (3.4)$$

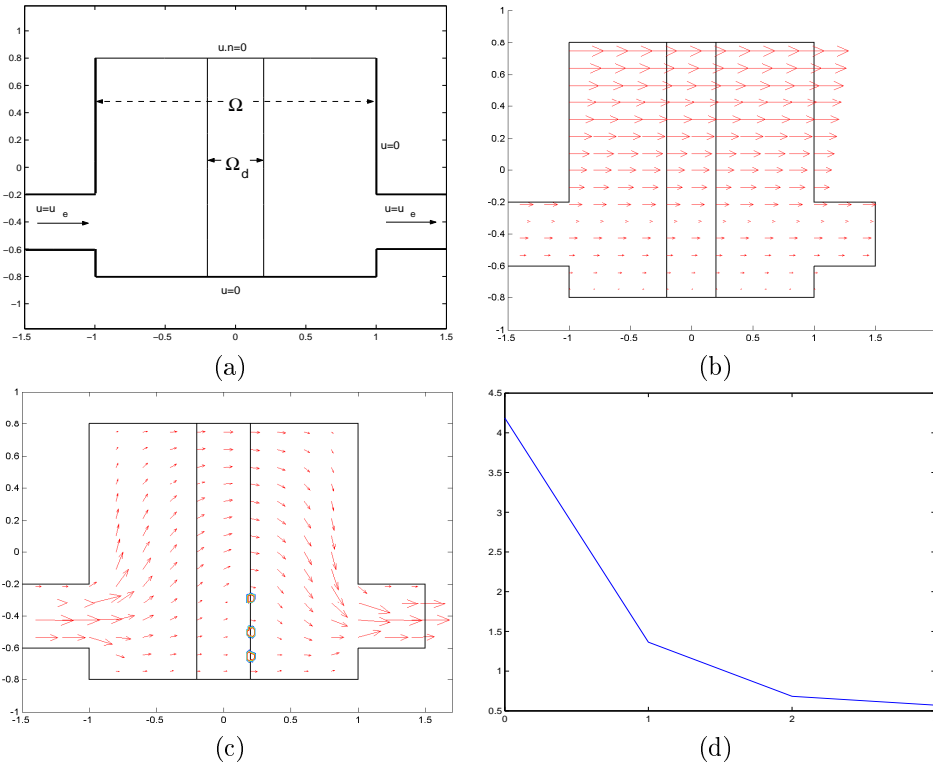


FIGURE 3.2 – Optimisation d'une cuve. (a) Géométrie du domaine, (b) écoulement cible, (c) position des obstacles, (d) historique de convergence.

La façon d'étendre la fonction coût n'est évidemment pas unique et a une forte influence sur la solution obtenue car, d'une part, rien ne garantit que celle-ci sera une fonction caractéristique et, d'autre part, on doit souvent se contenter de minimiseurs locaux. Nous allons fournir des arguments sur le choix de cette extension.

Une condition nécessaire d'optimalité pour le problème convexifié

$$\inf\{J(\gamma) \mid \gamma \in L^\infty(D, [0, 1])\}$$

(il s'agit d'une convexification de l'ensemble admissible, pas de la fonction coût) s'écrit

$$\begin{aligned} J'(\gamma)(z) &\leq 0 & \text{si } \gamma(z) &= 0, \\ J'(\gamma)(z) &= 0 & \text{si } 0 < \gamma(z) < 1, \\ J'(\gamma)(z) &\geq 0 & \text{si } \gamma(z) &= 1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $J'$  désigne la dérivée de Fréchet de  $J$ . L'idée est de choisir  $J$  de sorte que, en plus de (3.4), les conditions d'optimalité (3.3) et (3.5) soient équivalentes dès que  $\gamma$  est une fonction caractéristique. Ceci n'est pas toujours possible, et dépend des expressions de  $g_\Omega$  et  $J'(\gamma)$ . On montre que l'on peut y parvenir pour la minimisation de la compliance dans le cas de la conductivité ou de l'élasticité linéaire. Plus précisément, dans le cas de la conductivité par exemple, nous disposons de deux phases  $\gamma^+ > \gamma^- > 0$  et l'ensemble admissible convexifié est  $L^\infty(D, [\gamma^-, \gamma^+])$ . On prend comme fonction coût étendue la compliance calculée à l'aide de l'équation d'état

$$-\operatorname{div}(\theta(\gamma)\nabla u) = 0.$$

Les conditions requises peuvent être satisfaites en choisissant la fonction d'interpolation  $\theta$  en tant que polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Lorsque les conditions d'optimalité topologique (3.3) sont déterminées relativement à des perturbations de forme elliptique quelconque en dimension 2, on montre que  $\theta$  doit nécessairement être l'identité. Cela n'a pas grand intérêt car les solutions du



problème convexifié ont alors peu de chances d'être de type binaire. Lorsque l'optimalité est déterminée relativement à des inclusions de boules, la fonction d'interpolation doit être définie par les relations

$$\begin{aligned}\theta(\gamma) &= \frac{\gamma^2 + \gamma^+\gamma^-}{\gamma^+ + \gamma^-} && \text{en } 2D, \\ \theta(\gamma) &= \frac{-\gamma^3 + 3(\gamma^+ + \gamma^-)\gamma^2 + 2\gamma^+\gamma^-(\gamma^+ + \gamma^-)}{(2\gamma^+ + \gamma^-)(\gamma^+ + 2\gamma^-)} && \text{en } 3D.\end{aligned}\tag{3.6}$$

En particulier lorsque  $\gamma^- \rightarrow 0$ , en 2D, on trouve  $\theta(\gamma) \sim \gamma^2$ . Dans le même contexte, en élasticité linéaire, on trouve  $\theta(\gamma) \sim \gamma^3$ . On constate que ces deux fonctions d'interpolation sont celles le plus fréquemment utilisées dans le cadre de la méthode SIMP, ce choix étant essentiellement guidé par l'expérimentation.

### 3.3 Une méthodes de lignes de niveaux pour l'optimisation topologique [10, 7]

Le principal défaut des méthodes d'interpolation est d'introduire des densités intermédiaires qui peuvent subsister à convergence. Nous présentons une méthode de lignes de niveaux qui ne prend comme variable que des domaines *binaires*, au risque de générer une suite minimisante qui ne converge pas (par raffinement de maillage au niveau discret). Le principe de base est de chercher à résoudre directement les conditions d'optimalité (3.3). Nous supposons que le domaine inconnu est recherché en tant que partie d'un domaine borné fixe  $D$ , et nous représentons chaque domaine  $\Omega$  par une fonction  $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\Omega = \Omega(\psi) := \{x \in D, \psi(x) < 0\}.$$

Nous munissons l'ensemble  $\mathbb{R}^D$  des fonctions de  $D$  dans  $\mathbb{R}$  de la relation d'équivalence

$$\psi_1 \sim \psi_2 \iff \exists \mu > 0, \psi_1 = \mu\psi_2.$$

De cette manière, les conditions (3.3) seront vérifiées par le domaine  $\Omega(\psi)$  dès que

$$g_{\Omega(\psi)} \sim \psi.$$

Il s'agit d'une equation de point fixe que nous résolvons par la méthode des approximations successives avec relaxation. Par commodité, nous représentons chaque fonction *lignes de niveaux*  $\psi$  sur la sphère unité  $\mathcal{S}$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^D$ . L'algorithme est le suivant.

**Algorithme 3.1** 1. Choisir une fonction lignes de niveaux initiale  $\psi_0 \in \mathcal{S}$ . Poser  $k = 0$ .  
2. Déterminer  $\psi_{k+1} \in \mathcal{S}$  par la relation

$$\psi_{k+1} \sim (1 - \lambda_k)\psi_k + \lambda_k g_{\Omega(\psi_k)},\tag{3.7}$$

où  $\lambda_k \in ]0, 1]$  est choisi de sorte que

$$\mathcal{J}(\Omega(\psi_{k+1})) \leq \mathcal{J}(\Omega(\psi_k)).\tag{3.8}$$

3. Incrémenter  $n \leftarrow n + 1$  et aller à l'étape (2).

L'intérêt de choisir une norme hilbertienne est que (3.7) peut être formulé directement pour le représentant unitaire sous la forme

$$\psi_{k+1} = \frac{1}{\sin \theta_k} \left[ \sin((1 - \tau_k)\theta_k)\psi_k + \sin(\tau_k\theta_k) \frac{g_{\Omega(\psi_k)}}{\|g_{\Omega(\psi_k)}\|_{\mathcal{H}}} \right],$$

avec l'angle

$$\theta_k = \arccos \left\langle \psi_k, \frac{g_{\Omega(\psi_k)}}{\|g_{\Omega(\psi_k)}\|_{\mathcal{H}}} \right\rangle_{\mathcal{H}},$$

et  $\tau_k \in ]0, 1]$  jouant le rôle de pas au lieu de  $\lambda_k$ . En pratique,  $\tau_k$  est déterminé par une recherche linéaire de type Armijo. Pour que ceci soit possible, il faut vérifier que l'itération (3.7) fournit bien une direction de descente. C'est l'objet de l'argumentation suivante. Supposons que, pour une petite valeur de  $\lambda_k$ , l'application de (3.7) conduise à la création d'un petit trou en un point  $z \in \Omega_k$ . Cela signifie que  $\psi_{k+1}(z) > 0$  et  $\psi_k(z) < 0$ , ce qui implique  $g_{\Omega(\psi_k)} > 0$ . D'après (3.1), la fonction coût doit diminuer, du moins lorsque le trou créé a la forme d'une boule. En fait, dans certains cas, il n'y a pas de restriction sur la forme du trou : voir par exemple le théorème 2.2 lorsque seuls les coefficients  $\beta$  et  $F$  sont variables. Dans ce type de situation, il est possible de mener une analyse de convergence rigoureuse de l'algorithme 3.1, voir [7]. L'un des points clés est d'établir (à partir de la formule de la co-aire) que la quantité

$$\frac{d}{dt} [\mathcal{J}(\Omega(\psi + tg_{\Omega(\psi)}))]_{t=0}$$

est, sous certaines hypothèses de régularité, toujours négative, et ne s'annule qu'en cas de minimum local pour des perturbations de frontière, auquel cas des perturbations de topologie peuvent encore être effectuées. On montre ainsi que le seul obstacle à la convergence de l'algorithme vers une solution de (3.3) est la possibilité que les fonctions  $\psi_k$  et  $g_{\Omega(\psi_k)}$  deviennent au cours des itérations trop plates en certains endroits. On peut imaginer dans cette situation une réinitialisation de  $\psi_k$  ou de  $g_{\Omega(\psi_k)}$  (par la fonction distance signée par exemple), mais cela ne s'est jamais avéré nécessaire en pratique.

### 3.4 Application à l'optimisation de microstructures [13, 20]

Nous allons présenter une application un peu particulière de l'algorithme décrit à la section précédente. Il s'agit de l'optimisation de la microstructure attachée à une structure macroscopique  $\Omega$ . Les propriétés macroscopiques de  $\Omega$  au point  $x$  sont déterminées par l'étude de la distribution de matériau dans une cellule élémentaire  $\Omega_\mu$  contenant  $x$  via un procédé d'homogénéisation. Cette modélisation classique conduit à définir le tenseur d'élasticité macroscopique  $\mathbb{C}$  au point  $x$  par

$$(\mathbb{C})_{ijkl} = \frac{1}{V_\mu} \int_{\Omega_\mu} (\sigma_\mu(u_{\mu kl}))_{ij} . \quad (3.9)$$

Dans cette expression,  $V_\mu$  est le volume de  $\Omega_\mu$ ,  $\sigma_\mu$  est le tenseur des contraintes défini par rapport au matériau microscopique, et les  $u_{\mu kl}$  sont une famille de champs de déplacements microscopiques canoniques. Plus précisément,

$$u_{\mu kl}(y) = u + \varepsilon_{kl}y + \tilde{u}_{\mu kl}(y), \quad \varepsilon_{kl} = e_k \otimes_s e_l,$$

où  $u$  est un déplacement constant, les  $e_k$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\otimes_s$  est le produit tensoriel symétrisé, et  $\tilde{u}_{\mu kl}(y) \in \mathcal{U}_\mu$  vérifie l'équation d'équilibre

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(\tilde{u}_{\mu kl}) \cdot \nabla^s \eta + \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu(\varepsilon_{kl}y) \cdot \nabla^s \eta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{U}_\mu.$$

L'espace  $\mathcal{U}_\mu$  est l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles. C'est une partie de l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{U}}_\mu := \left\{ v \in [H^1(\Omega_\mu)]^2 : \int_{\Omega_\mu} v = 0, \int_{\partial\Omega_\mu} v \otimes_s n = 0 \right\}$$

auquel on adjoint des conditions aux limites qui dépendent du modèle considéré. Dans le cas d'homogénéisation périodique,  $\Omega_\mu$  est généralement un pavé et  $\mathcal{U}_\mu$  contient des conditions de périodicité sur chaque paire de faces opposées.

Nous nous intéressons à un problème d'optimisation topologique de la forme

$$\inf_{\Omega_\mu^1 \subset \Omega_\mu} J(\Omega_\mu^1) = h(\mathbb{C}) + \lambda \frac{|\Omega_\mu^1|}{V_\mu}, \quad (3.10)$$

où  $\Omega_\mu^1$  est une région de  $\Omega_\mu$  occupée par un matériau de module d'Young donné, disons unitaire, tandis que le complémentaire  $\Omega_\mu \setminus \Omega_\mu^1$  est occupé par une phase de module d'Young petit (0.01 dans les exemples). La sensibilité topologique de la fonction  $J$  est étudiée dans [13]. Nous présentons trois exemples en homogénéisation périodique correspondant :

- à la maximisation du module d'élasticité isostatique (*bulk modulus*, voir figure 3.3), lorsque

$$h(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{-1})_{1111} + 2(\mathbb{C}^{-1})_{1122} + (\mathbb{C}^{-1})_{2222},$$

- à la maximisation du coefficient de Poisson (voir figure 3.4, nous obtenons pour coefficient de Poisson  $\nu = 0.87$ ), lorsque

$$h(\mathbb{C}) := \frac{(\mathbb{C}^{-1})_{1122}}{(\mathbb{C}^{-1})_{1111}} + \frac{(\mathbb{C}^{-1})_{1122}}{(\mathbb{C}^{-1})_{2222}},$$

- à la minimisation d'un coefficient de Poisson modifié (voir figure 3.5, nous obtenons pour coefficient de Poisson  $\nu = -0.37$ ), le problème avec le véritable coefficient de Poisson s'avérant mal conditionné, lorsque

$$h(\mathbb{C}) := -(\mathbb{C}^{-1})_{1122}.$$

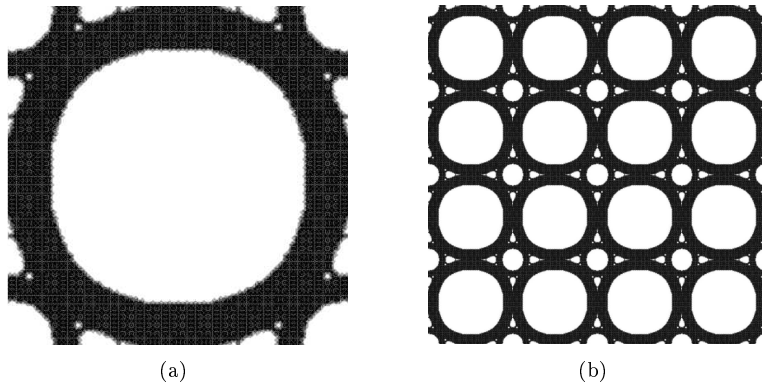


FIGURE 3.3 – Maximisation du module d'élasticité isostatique : (a) cellule élémentaire ; (b) microstructure périodique.

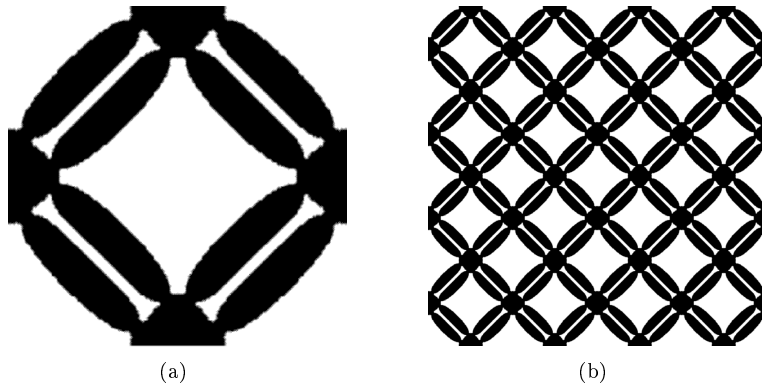


FIGURE 3.4 – Maximisation du coefficient de Poisson : (a) cellule élémentaire ; (b) microstructure périodique.

D'autres modèles d'homogénéisation sont traités dans [20] : le modèle linéaire et le modèle uniforme. On obtient des configurations optimales sensiblement différentes.

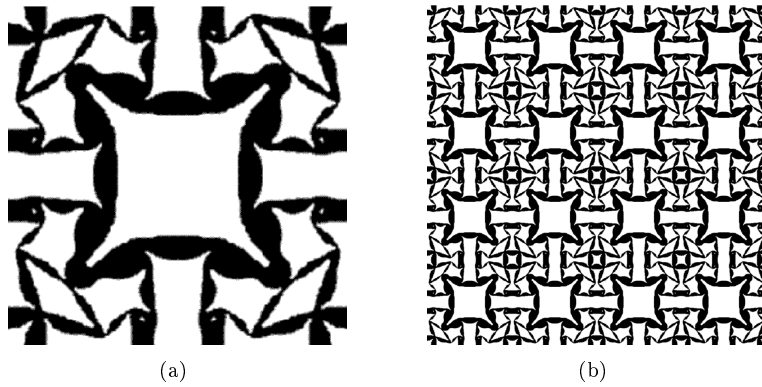


FIGURE 3.5 – Minimisation d'un coefficient de Poisson modifié : (a) cellule élémentaire; (b) micro-structure périodique.

# Chapitre 4

## Optimisation topologique sous contraintes

### 4.1 Conditions d'optimalité [11]

#### 4.1.1 Cadre général

On s'intéresse maintenant à un problème d'optimisation de domaines de la forme

$$\inf\{J(\Omega), \Omega \in \mathcal{E}, G(\Omega) \in -K\}, \quad (4.1)$$

où  $\mathcal{E}$  est un ensemble de domaines admissibles,  $K$  est un cône convexe fermé d'intérieur non vide d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé  $Y$ , et

$$J = \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Omega \mapsto J(\Omega), \end{cases} \quad G = \begin{cases} \mathcal{E} \rightarrow Y, \\ \Omega \mapsto G(\Omega), \end{cases}$$

sont des fonctionnelles données. Afin d'établir des conditions d'optimalité locale pour (4.1), nous devons spécifier une classe de perturbations admissibles ainsi que la sensibilité des fonctionnelles  $J$  et  $G$  par rapport à ces perturbations. Elles sont de deux types.

- *Perturbations de frontière.* Suivant l'approche classique de [57], nous représentons une perturbation de frontière par un champ de déplacements  $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ . Le domaine perturbé est défini par

$$\Omega(V) = (I + V)(\Omega),$$

avec  $I$  la transformation identité de  $\mathbb{R}^N$ .

- *Perturbations topologiques.* Elles consistent à créer des trous dans  $\Omega$  ainsi qu'à ajouter de nouvelles composantes connexes en dehors de  $\Omega$ . Pour des raisons de convexité, nous devons considérer un nombre fini mais arbitraire de telles perturbations effectuées simultanément. Une perturbation topologique sera donc caractérisée par un nombre  $m \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , une famille de points deux à deux distincts  $z = (z_1, \dots, z_m) \in (\mathbb{R}^N)^m$ , et une famille de rayons  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m) \in \mathbb{R}_+^m$ . Elle conduit au domaine

$$\Omega(z, \rho) = \left( \Omega \setminus \bigcup_{\substack{z_i \in \text{Int}(\Omega) \\ i=1, \dots, m}} \overline{B(z_i, \rho_i)} \right) \cup \bigcup_{\substack{z_i \in \text{Ext}(\Omega) \\ i=1, \dots, m}} B(z_i, \rho_i).$$

Notons que les points  $z_i \in \partial\Omega$  ne sont pas pris en compte. La forme sphérique des perturbations est choisie uniquement comme exemple.

Nous notons

$$\Omega(V, z, \rho) = \left( (I + V)(\Omega) \setminus \bigcup_{\substack{z_i \in \text{Int}(\Omega) \\ i=1, \dots, m}} \overline{B(z_i, \rho_i)} \right) \cup \bigcup_{\substack{z_i \in \text{Ext}(\Omega) \\ i=1, \dots, m}} B(z_i, \rho_i)$$

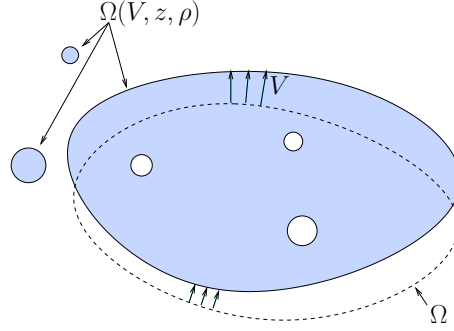


FIGURE 4.1 – Perturbations de domaine

le domaine ainsi perturbé (voir figure 4.1). Pour garantir que le nouveau domaine appartient à  $\mathcal{E}$ , nous supposons qu'il existe un cône convexe  $\mathcal{S}(\Omega) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  de directions admissibles pour les perturbations de frontière et un ensemble  $\mathcal{T}(\Omega) \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$  de centres admissibles pour les perturbations topologiques vérifiant la propriété suivante : pour tous  $V \in \mathcal{S}(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $z \in \mathcal{T}(\Omega)^{[m]}$ , il existe  $t_0 > 0$  et  $\rho_0 > 0$  tels que

$$(t, \rho) \in [0, t_0] \times [0, \rho_0]^m \Rightarrow \Omega(tV, z, \rho) \in \mathcal{E}.$$

Nous avons utilisé la notation

$$\mathcal{T}(\Omega)^{[m]} = \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{T}(\Omega)^m, z_i \neq z_j \forall i \neq j\}.$$

Nous posons  $\mathcal{T}(\Omega)^\sharp = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{T}(\Omega)^{[m]}$  et nous dirons que  $\mathbb{R}_+^m \ni \rho \leq \bar{\rho} \in \mathbb{R}_+$  si  $\rho_i \leq \bar{\rho}$  pour tout  $i$ . Nous dirons qu'un domaine  $\Omega \in \mathcal{E}$  est *Per*( $\Omega$ )-optimal si pour tout  $(V, z) \in \mathcal{S}(\Omega) \times \mathcal{T}(\Omega)^\sharp$  il existe  $(\bar{t}, \bar{\rho}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\forall t \leq \bar{t}, \forall \rho \leq \bar{\rho}, \quad G(\Omega(tV, z, \rho)) \in -K \implies J(\Omega(tV, z, \rho)) \geq J(\Omega).$$

Quant à la sensibilité des fonctionnelles, nous supposons que pour tous  $V \in \mathcal{S}(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $z \in \mathcal{T}(\Omega)^{[m]}$ , les développements asymptotiques suivants sont connus :

$$J(\Omega(tV, z, \rho)) = J(\Omega) + t \langle J'_S(\Omega), V \rangle + \sum_{i=1}^m f(\rho_i) J'_T(\Omega)(z_i) + o(t, f(\rho_1), \dots, f(\rho_m)), \quad (4.2)$$

$$G(\Omega(tV, z, \rho)) = G(\Omega) + t G'_S(\Omega)(V) + \sum_{i=1}^m f(\rho_i) G'_T(\Omega)(z_i) + o(t, f(\rho_1), \dots, f(\rho_m)). \quad (4.3)$$

La fonction  $f$  est un homeomorphisme de  $\mathbb{R}_+$  dans lui-même (ou plus généralement un homeomorphisme de  $[0, a]$  dans  $[0, b]$  pour certains  $a, b > 0$ ) avec  $f(0) = 0$ , et le reste  $o(t, f(\rho_1), \dots, f(\rho_m))$  vérifie

$$o(t, f(\rho_1), \dots, f(\rho_m)) = (t^2 + f(\rho_1)^2 + \dots + f(\rho_m)^2)^{1/2} \varepsilon(t, f(\rho_1), \dots, f(\rho_m)),$$

avec  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ . Les fonctions  $J'_S(\Omega) : \mathcal{S}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G'_S(\Omega) : \mathcal{S}(\Omega) \rightarrow Y$  sont supposées linéaires. Les fonctions  $J'_T(\Omega) : \mathcal{T}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $G'_T(\Omega) : \mathcal{T}(\Omega) \rightarrow Y$  sont quelconques.

Par un argument de séparation, nous démontrons le résultat suivant.

**Théorème 4.1 (Conditions nécessaires d'optimalité)** *Soit  $\Omega \in \mathcal{E}$  un domaine *Per*( $\Omega$ )-optimal. Nous supposons que les fonctionnelles  $J$  et  $G$  vérifient (4.2) et (4.3). Nous supposons de plus que la condition de qualification des contraintes suivante est remplie : il existe  $V \in \mathcal{S}(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $(z_1, \dots, z_m) \in \mathcal{T}(\Omega)^{[m]}$ ,  $(\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}_+^m$  tels que*

$$G(\Omega) + G'_S(\Omega)(V) + \sum_{i=1}^m \beta_i G'_T(\Omega)(z_i) \in \text{Int}(-K). \quad (4.4)$$

Alors il existe  $\mu \in K^+$  (le cône dual positif de  $K$ ) tel que

$$\langle \mu, G(\Omega) \rangle = 0, \quad (4.5)$$

$$\forall V \in \mathcal{S}(\Omega), \quad \langle J'_S(\Omega) + \mu \circ G'_S(\Omega), V \rangle \geq 0, \quad (4.6)$$

$$\forall x \in \mathcal{T}(\Omega), \quad J'_T(\Omega)(x) + \langle \mu, G'_T(\Omega)(x) \rangle \geq 0. \quad (4.7)$$

Pour fixer les idées prenons le cas le plus simple d'une contrainte de borne supérieure sur le volume. Lorsque  $\mathcal{T}(\Omega) = \mathbb{R}^N$ , il apparaît que la condition de qualification est satisfaite pour tout  $\Omega \neq \emptyset$ , et la condition d'optimalité topologique (4.7) s'écrit :

$$J'_T(\Omega)(x) + \mu \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

D'autres exemples sont traités dans [11]. En dehors de la question de qualification, qui dépend du domaine, un point essentiel à vérifier est la validité des formules (4.2) et (4.3). En général, les développements asymptotiques topologiques sont établis pour une perturbation unique. Le caractère additif des perturbations, ainsi que leur éventuel couplage avec des déformations de frontière, n'est pas évident. Nous nous contentons de le présenter sur un exemple.

#### 4.1.2 Un exemple

Soit  $D$  un domaine borné suffisamment régulier de  $\mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial D = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , avec  $|\Gamma_D| > 0$ , et  $\mathcal{E}$  l'ensemble des sous-domaines de  $D$ . Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$  et  $F : I \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_N)$  une application continue. Pour tout  $\eta \in I$  et tout  $\Omega \subset D$  nous considérons le problème aux limites :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_\Omega \nabla u_\Omega(\eta)) = 0 & \text{dans } D, \\ \alpha_\Omega \nabla u_\Omega(\eta) \cdot n = F(\eta) & \text{sur } \Gamma_N, \\ u_\Omega(\eta) = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases} \quad (4.8)$$

avec

$$\alpha_\Omega = \begin{cases} \alpha^+ > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \alpha^- > 0 & \text{dans } D \setminus \Omega. \end{cases}$$

Nous posons

$$Y = \mathcal{C}(I),$$

$$K = \{f \in Y, f(\eta) \geq 0 \forall \eta \in I\}.$$

Nous prenons comme fonctionnelle de contrainte la compliance translatée par une fonction donnée  $M \in Y$  :

$$G(\Omega) : \eta \mapsto \int_D \alpha_\Omega |\nabla u_\Omega(\eta)|^2 dx - M(\eta) = \langle F(\eta), u_\Omega(\eta) \rangle - M(\eta).$$

Ainsi,  $G(\Omega) \in -K$  signifie que la compliance de  $\Omega$  sous le chargement  $F(\eta)$  est inférieure à  $M(\eta)$  pour tout  $\eta \in I$ . Nous posons

$$\mathcal{S}(\Omega) = \{V \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \operatorname{supp}(V) \subset \tilde{D}\}, \quad \tilde{D} \subset\subset D,$$

$$\mathcal{T}(\Omega) = \mathbb{R}^N.$$

Supposons dans un premier temps que  $\eta \in I$  est fixé. Alors la sensibilité de  $G$  par rapport à une perturbation de frontière ou par rapport à une perturbation topologique unique est connue (voir [52] et la section 2.1). Nous montrons le comportement additif de ces perturbations à l'ordre 1. Dans un deuxième temps, nous établissons l'uniformité du reste par rapport à  $\eta \in I$ . Au final, nous obtenons bien un développement asymptotique de la forme (4.3).

A titre d'exemple, supposons que  $J(\Omega) = |\Omega|$ . Sous condition de qualification, le théorème 4.1 fournit les conditions nécessaires d'optimalité suivantes : il existe  $\mu \in K^+$  (l'ensemble des mesures de Radon positives sur  $I$ ) tel que

$$\int_I G(\Omega)(\eta) d\mu(\eta) = 0,$$

$$1 - g_S(\Omega, \mu) = 0 \text{ on } \Gamma_\Omega \cap \tilde{D}, \quad (4.9)$$

$$1 - g_T(\Omega, \mu) \leq 0 \text{ in } \Omega, \quad (4.10)$$

$$1 - g_T(\Omega, \mu) \geq 0 \text{ in } D \setminus \overline{\Omega}, \quad (4.11)$$

avec

$$g_S(\Omega, \mu)(x) = \int_I (\alpha^+ - \alpha^-) \left( \frac{1}{\alpha^+ \alpha^-} |\alpha_\Omega(x) \nabla u_\Omega(\eta)(x) \cdot n|^2 + |\nabla_\tau u_\Omega(\eta)(x)|^2 \right) d\mu(\eta), \quad (4.12)$$

$$g_T(\Omega, \mu)(x) = \int_I 2 \frac{\alpha^+ - \alpha^-}{\alpha^+ + \alpha^-} \alpha_\Omega(x) |\nabla u_\Omega(\eta)(x)|^2 d\mu(\eta), \quad (4.13)$$

$\Gamma_\Omega = \partial\Omega \cap D$  l'interface et  $\nabla_\tau$  le gradient tangentiel.

## 4.2 Méthodes de lagrangien et de lagrangien augmenté [8]

### 4.2.1 Lagrangien et points selles

Le but de cette section est de proposer un algorithme pour la résolution des conditions d'optimalité énoncées à la section précédente. Au vu de l'analogie entre le théorème 4.1 et les conditions de KKT en optimisation continue, nous introduisons le lagrangien

$$L(\Omega, \mu) = J(\Omega) + \langle \mu, G(\Omega) \rangle_{Y', Y}$$

défini sur  $\mathcal{E} \times Y'$ , avec les mêmes notations qu'à la section 4.1. Nous allons voir que les solutions du système d'optimalité correspondent à des points selles locaux de ce lagrangien. La notion de point selle local est liée à la nature des perturbations considérées pour définir l'optimalité. Pour simplifier, nous ne considérons que des perturbations topologiques.

**Définition 4.1** *Nous disons qu'un couple  $(\Omega, \mu) \in \mathcal{E} \times K^+$  est un point selle local de  $L$  sur  $\mathcal{E} \times K^+$  si, pour tout  $z \in \mathcal{T}(\Omega)^\sharp$  il existe  $\bar{\rho} > 0$  tel que*

$$L(\Omega, \mu') \leq L(\Omega, \mu) \leq L(\Omega(z, \rho), \mu) \quad \forall \rho \leq \bar{\rho}, \forall \mu' \in K^+. \quad (4.14)$$

Avant d'établir précisément le lien entre les domaines  $Per(\Omega)$ -optimaux et les points selles locaux du lagrangien, nous nous intéressons à la possibilité d'augmenter ce lagrangien dans le but d'améliorer les performances numériques.

### 4.2.2 Lagrangien augmenté

La manière classique d'augmenter le lagrangien est d'effectuer une régularisation de Moreau-Yosida concave par rapport à la variable duale  $\mu$ . Dans notre cas,  $\mu$  vit dans l'espace vectoriel  $Y'$ . La seule hypothèse que nous devons faire pour construire un lagrangien augmenter est donc de supposer que  $Y$  est un espace de Hilbert. Etant donné un paramètre d'augmentation  $b > 0$ , nous posons

$$L_b(\Omega, \mu) = J(\Omega) + \zeta_b(G(\Omega), \mu)$$

où, pour tout  $y \in Y$ ,

$$\zeta_b(y, \mu) = \sup_{\mu' \in K^+} \left( \langle y, \mu' \rangle - \frac{1}{2b} \|\mu - \mu'\|^2 \right). \quad (4.15)$$

Soit  $P_{K^+}$  l'opérateur de projection de  $Y$  sur  $K^+$ . Nous avons les propriétés suivantes.

**Théorème 4.2** 1. *Pour tout  $(y, \mu) \in Y \times Y$  la fonction  $\zeta_b$  admet l'expression*

$$\zeta_b(y, \mu) = \frac{1}{2b} (\|P_{K^+}(\mu + by)\|^2 - \|\mu\|^2). \quad (4.16)$$

2. *Pour tout  $\mu \in Y$ , la fonction  $\zeta_b(\cdot, \mu)$  est différentiable sur  $Y$  de gradient*

$$\nabla_y \zeta_b(y, \mu) = P_{K^+}(\mu + by). \quad (4.17)$$

3. *Pour tout  $y \in Y$ , la fonction  $\zeta_b(y, \cdot)$  est différentiable sur  $Y$  de gradient*

$$\nabla_\mu \zeta_b(y, \mu) = \frac{1}{b} (P_{K^+}(\mu + by) - \mu). \quad (4.18)$$



### 4.2.3 Liens entre domaines optimaux et points selles

Nous définissons l'ensemble

$$\Upsilon(\Omega) = \{\varphi : \mathcal{T}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) \neq 0 \forall x \in \mathcal{T}(\Omega)\}.$$

**Théorème 4.3** *Soit un domaine  $\Omega \in \mathcal{E}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes (pour la troisième on suppose que  $Y$  est un espace de Hilbert).*

1. *Le domaine  $\Omega$  est  $Per(\Omega)$ -optimal et admet un multiplicateur de Lagrange  $\mu \in K^+$  tel que*

$$J'(\Omega)(x) + \mu \circ G'(\Omega)(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{T}(\Omega), \quad (4.19)$$

$$\langle \mu, G(\Omega) \rangle_{Y', Y} = 0, \quad (4.20)$$

*et  $J'_T(\Omega) + \mu \circ G'_T(\Omega) \in \Upsilon(\Omega)$ . Rappelons que (4.19) et (4.20) sont automatiquement vérifiées sous condition de qualification.*

2. *Le couple  $(\Omega, \mu)$  est un point selle local du lagrangien  $L$  sur  $\mathcal{E} \times K^+$  et  $J'_T(\Omega) + \mu \circ G'_T(\Omega) \in \Upsilon(\Omega)$ .*
3. *Le couple  $(\Omega, \mu)$  est un point selle local du lagrangien augmenté  $L_b$  sur  $\mathcal{E} \times Y$  et  $J'_T(\Omega) + \mu \circ G'_T(\Omega) \in \Upsilon(\Omega)$ .*

Notons que la condition  $J'_T(\Omega) + \mu \circ G'_T(\Omega) \in \Upsilon(\Omega)$  est peu restrictive : il suffit d'enlever de  $\mathcal{T}(\Omega)$  les points où  $J'_T(\Omega) + \mu \circ G'_T(\Omega)$  s'annule, ce qui revient à affaiblir la notion d'optimalité.

Nous voyons donc que la résolution de (4.1) peut se traduire par la recherche d'un point selle du lagrangien, éventuellement augmenté. Comme nous n'avons a priori à disposition que des sensibilités à l'ordre 1, nous proposons d'utiliser l'algorithme d'Uzawa.

#### Algorithme 4.1 (lagrangien ordinaire)

1. *Choisir  $\Omega_0 \in \mathcal{E}$  et  $\mu_0 \in K^+$ . Poser  $k = 0$ . Fixer  $\tau > 0$  et  $\varepsilon_{stop} > 0$ .*
2. *A partir de  $\Omega_k$ , trouver une solution (locale)  $\Omega_{k+1}$  de*

$$\min_{\Omega \in \mathcal{E}} L(\Omega, \mu_k). \quad (4.21)$$

3. *Poser  $\mu_{k+1} = P_{K^+}(\mu_k + \tau G(\Omega_{k+1}))$ .*
4. *Si  $\|\mu_{k+1} - \mu_k\| \leq \varepsilon_{stop}$  arrêter sinon incrémenter  $k \leftarrow k + 1$  et retourner à l'étape (2).*

#### Algorithme 4.2 (lagrangien augmenté)

1. *Choisir  $\Omega_0 \in \mathcal{E}$  et  $\mu_0 \in Y$ . Poser  $k = 0$ . Fixer  $b > 0$ ,  $\tau > 0$  et  $\varepsilon_{stop} > 0$ .*
2. *A partir de  $\Omega_k$ , trouver une solution (locale)  $\Omega_{k+1}$  de*

$$\min_{\Omega \in \mathcal{E}} L_b(\Omega, \mu_k). \quad (4.22)$$

3. *Poser  $\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{\tau}{b} [P_{K^+}(\mu_k + bG(\Omega_{k+1})) - \mu_k]$ .*
4. *Si  $\|\mu_{k+1} - \mu_k\| \leq \varepsilon_{stop}$  arrêter sinon incrémenter  $k \leftarrow k + 1$  et retourner à l'étape (2).*

En pratique, le lagrangien augmenté s'avère être beaucoup plus performant, à condition d'avoir choisi des valeurs convenables de  $b$  et  $\tau$ . Il est généralement convenable de prendre  $\tau = b$ . On observe alors des phénomènes connus en optimisation non linéaire : si  $b$  est trop petit, l'algorithme converge avec peu d'oscillations mais lentement, si  $b$  est trop grand, les oscillations sont importantes et peuvent conduire à la divergence. Pour résoudre les problèmes sans contrainte (4.21) et (4.22), nous utilisons l'algorithme de la section 3.3.

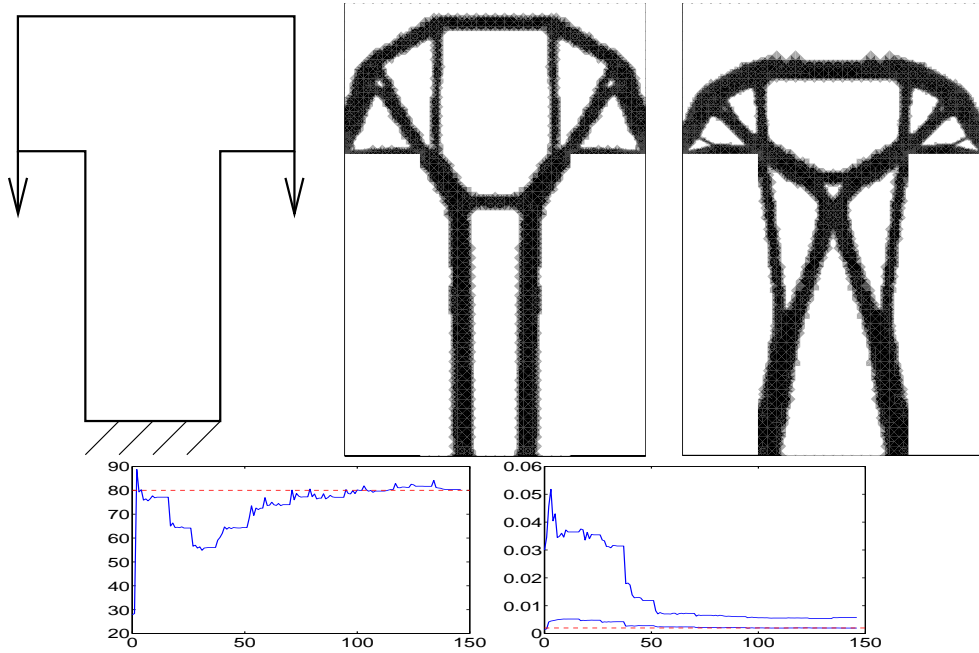


FIGURE 4.2 – Pylône, sans (en haut au centre) et avec (en haut à droite) contrainte de fréquence propre, historiques de convergence du volume (en bas à gauche) et des deux premières fréquences propres (en bas à droite) pour le problème à deux contraintes.

#### 4.2.4 Quelques résultats numériques

Nous considérons comme premier exemple un problème d'optimisation de structure à deux contraintes :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{E}} |\Omega| \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} C_{\Omega} \leq C_{max}, \\ \Lambda_{\Omega} \geq \Lambda_{min}, \end{cases}$$

avec  $C_{\Omega}$  la compliance et  $\Lambda_{\Omega}$  la première fréquence propre. Il s'agit de l'optimisation d'un pylône, voir figure 4.2.

Le deuxième exemple est le problème à infinité de contraintes étudié à la section 4.1.2 :

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{E}} |\Omega| \quad \text{tel que} \quad C_{\Omega}(\xi) \leq C_{max} \quad \forall \xi \in I,$$

où  $C_{\Omega}(\xi)$  est la compliance de  $\Omega$  sous le chargement  $F(\xi)$ . La géométrie est celle d'un pont avec chargement ponctuel se déplaçant sur toute la longueur, voir figure 4.3.

### 4.3 Une méthode de pénalisation pour les contraintes ponctuelles [5, 16]

#### 4.3.1 Description de la méthode

Dans cette section nous nous intéressons à la prise en compte de contraintes ponctuelles sur le gradient de l'état. D'un point de vue général, les contraintes d'état ponctuelles sont connues pour être difficiles à traiter, même dans le cadre classique du contrôle par une fonction. La raison en est que le multiplicateur de Lagrange associé est généralement une mesure très irrégulière, avec notamment une partie singulière sur le bord de l'ensemble actif [33]. Cela pose des problèmes évident de discrétisation. Or il se trouve que les contraintes d'état sur le gradient (dites d'ordre 1), encore plus difficiles, sont particulièrement utiles en optimisation de structures, car les critères habituels d'endommagement ou de rupture font intervenir les valeurs locales du tenseur des contraintes. Dans ce cas, il y a une difficulté

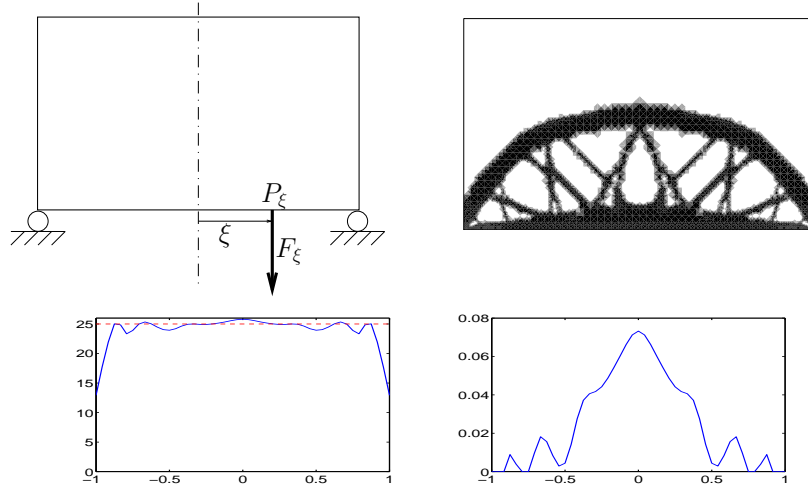


FIGURE 4.3 – Pont sous chargements multiples : domaine optimal (en haut à droite), distribution de la compliance (en bas à gauche) et multiplicateur de Lagrange (en bas à droite).

supplémentaire : la contrainte ne doit être considérée qu'à l'intérieur de la structure, qui par définition se déforme au cours de l'optimisation. Pour ces raisons, nous abandonnons l'idée d'introduire des multiplicateurs de Lagrange pour utiliser une méthode de pénalisation. Signalons également que les méthodes basées sur l'homogénéisation sont mal adaptées pour traiter ce genre de problème. En effet, les modèles homogénéisés ne voient que les valeurs localement moyennées du gradient.

Considérons d'abord le problème de conductivité :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha_{\Omega} \nabla u_{\Omega}) &= 0 & \text{dans } D, \\ u_{\Omega} &= 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \alpha_{\Omega} \partial_n u_{\Omega} &= g & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (4.23)$$

avec

$$\alpha_{\Omega} = \begin{cases} \alpha_{in} > 0 & \text{dans } \Omega, \\ \alpha_{out} > 0 & \text{dans } D \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad \frac{\alpha_{out}}{\alpha_{in}} \ll 1. \quad (4.24)$$

Nous supposons que nous voulons minimiser une fonction coût  $\Omega \mapsto I_{\Omega}(u_{\Omega})$  sous la contrainte

$$\frac{1}{2} B \nabla u_{\Omega} \cdot \nabla u_{\Omega} \leq M \quad \text{p.p. dans } \Omega \cap \tilde{D}, \quad (4.25)$$

où  $B$  est une matrice symétrique semi-définie positive et  $M > 0$ . Nous introduisons la fonction pénalisée

$$I_{\Omega}^{\gamma}(u_{\Omega}) = I_{\Omega}(u_{\Omega}) + \gamma J_{\Omega}(u_{\Omega}) \quad (4.26)$$

avec un terme de pénalité de la forme

$$J_{\Omega}(u) = \int_{\tilde{D}} \alpha_{\Omega} \Phi\left(\frac{1}{2} B \nabla u \cdot \nabla u\right) dx. \quad (4.27)$$

En optimisation non linéaire, il est standard de choisir  $\Phi$  quadratique. Ici, nous souhaitons pouvoir considérer des domaines  $D$  peu réguliers, notamment avec coin rentrant, ce qui fera que  $u_{\Omega}$  aura une régularité limitée. Afin de pouvoir non seulement définir  $J_{\Omega}$  par (4.27) mais aussi lui associer une dérivée topologique, nous ne pouvons pas nous accommoder d'une fonction  $\Phi$  à croissance quadratique. Nous optons pour une fonction à croissance linéaire. Or nous savons que, par analogie (formelle) avec les fonctions de pénalisation exactes en optimisation continue, la contrainte ne sera prise en compte correctement à  $\gamma$  fini que si  $\Phi$  admet un point anguleux en  $M$ . Nous introduisons alors la famille  $(\Phi_p)_{p \geq 1}$  de fonctions régulières définies par

$$\Phi_p(t) = \Theta_p\left(\frac{t}{M}\right) \quad (4.28)$$

avec

$$\Theta_p : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ t \mapsto (1 + t^p)^{1/p} - 1,$$

voir figure 4.4 (gauche). On vérifie aisément que, lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ ,  $\Phi_p(t)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$  vers

$$\Phi_\infty(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq M, \\ \frac{t}{M} & \text{si } t \geq M. \end{cases}$$

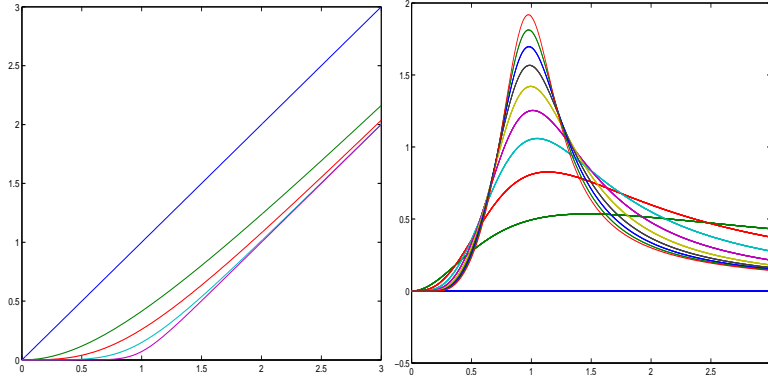


FIGURE 4.4 – Gauche : fonction  $\Theta_p$  pour  $p = 1, 2, 3, 5, 10$  (de haut en bas) ; droite : fonction  $\hat{\Psi}_{\pm 1}$  pour  $p = 1, \dots, 10$  (de bas en haut en  $t = 1$ ).

Le calcul de la dérivée topologique de la fonctionnelle  $J_\Omega$  définie par (4.27) n'est pas chose facile à cause de la non linéarité de  $\Phi$ . Nous appliquons le même schéma qu'à la section 2.1, mais la difficulté principale réside dans le calcul des termes correctifs  $\delta J_1$  et  $\delta J_2$ . De plus il y a d'autres termes car la condition (2.12) n'est pas vérifiée. Nous obtenons pour une inclusion circulaire  $B(z, \varepsilon)$  en dimension 2

$$J_{\Omega_\varepsilon}(u_{\Omega_\varepsilon}) - J_\Omega(u_\Omega) = \varepsilon^2 G(z) + o(\varepsilon^2),$$

avec

$$G = \pi \rho [2\alpha_0 \nabla u_\Omega \cdot \nabla v_\Omega + \alpha_0 k_1 B \nabla u_\Omega \cdot \nabla u_\Omega] + \pi \beta_1 \chi_{\bar{D}} \Phi \left( (1 - \rho)^2 \frac{1}{2} B \nabla u_\Omega \cdot \nabla u_\Omega \right) \\ + \alpha_0 \chi_{\bar{D}} \left[ \Psi_\rho(\nabla u_\Omega) + \rho^2 \frac{\pi}{4} k_1 \text{tr}(B) |\nabla u_\Omega|^2 \right] - \pi \alpha_0 \chi_{\bar{D}} \Phi \left( \frac{1}{2} B \nabla u_\Omega \cdot \nabla u_\Omega \right). \quad (4.29)$$

Dans cette expression,  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  désignent respectivement les valeurs de  $\alpha(z)$  avant et après perturbation,  $u_\Omega$  et  $v_\Omega$  sont les états directs et adjoints, et

$$k_1 = \Phi' \left( \frac{1}{2} B \nabla u_\Omega \cdot \nabla u_\Omega \right) \chi_{\bar{D}}, \quad \rho = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 + \alpha_0}. \quad (4.30)$$

La fonction  $\Psi_\rho$  s'exprime à l'aide d'intégrales que l'on ne peut pas calculer explicitement. Dans le cas où  $B$  est la matrice identité, nous avons

$$\Psi_\rho(U) = \hat{\Psi}_\rho \left( \frac{1}{2} |U|^2 \right),$$

avec

$$\hat{\Psi}_\rho(\sigma) = \rho \int_0^\rho \int_0^\pi \frac{1}{t^2} \left[ \Phi(\sigma(1 + t^2 + 2t \cos \theta)) - \Phi(\sigma) - \Phi'(\sigma) \sigma(t^2 + 2t \cos \theta) \right] d\theta dt. \quad (4.31)$$

Le graphe de cette fonction pour  $\Phi$  donné par (4.28) et  $M = 1$  est représenté sur la figure 4.4 (droite). Dans la mise en oeuvre numérique, les valeurs de  $\Psi_\rho$  sont préalablement calculées par une méthode

de quadrature sur un échantillon de points et stockées dans un tableau. L'échantillonnage est resserré dans les régions de forte variation. Les valeurs requises au cours de l'optimisation sont ensuite obtenues par interpolation linéaire entre les échantillons les plus proches.

L'algorithme d'optimisation topologique est le suivant.

#### Algorithme 4.3

1. Choisir  $\gamma$  assez grand, une suite croissante  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombre positifs tendant vers  $+\infty$  et un domaine initial  $\Omega_0$ . Poser  $n = 0$ .

2. Itérer :

– A partir de  $\Omega_n$ , trouver un minimiseur (local approché)  $\Omega_{n+1}$  du problème

$$\inf I_\Omega(u_\Omega) + \gamma \int_{\bar{D}} \alpha_\Omega \Phi_{p_n} \left( \frac{1}{2} B \nabla u_\Omega \cdot \nabla u_\Omega \right) dx, \quad (4.32)$$

– Incréments  $n \leftarrow n + 1$ .

Pour résoudre (4.32), nous utilisons l'algorithme de la section 3.3.

### 4.3.2 Résultats numériques pour la conductivité

Nous prenons comme fonction coût

$$I_\Omega(u_\Omega) = |\Omega| + \lambda K_\Omega(u_\Omega), \quad (4.33)$$

avec  $|\Omega|$  la mesure de Lebesgue de  $\Omega$  et  $K_\Omega(u_\Omega)$  la compliance donnée par

$$K_\Omega(u_\Omega) = \int_D \alpha_\Omega |\nabla u_\Omega|^2 dx = \int_{\Gamma_N} g u_\Omega ds.$$

Nous présentons deux exemples.

#### Conducteur en U

Le premier exemple est un conducteur en forme de U (voir figure 4.5). Le domaine obtenu sans la contrainte locale est représenté sur la figure 4.6 (gauche). Pour le problème avec contrainte, nous réalisons 3 itérations, avec respectivement  $p = 8, 16, 32$ , voir figure 4.6 (droite). Nous observons que les coins rentrants ont été arrondis, ce qui était le principal but recherché. De plus, la contrainte est satisfaite avec une faible marge d'erreur ( $< 1\%$ )

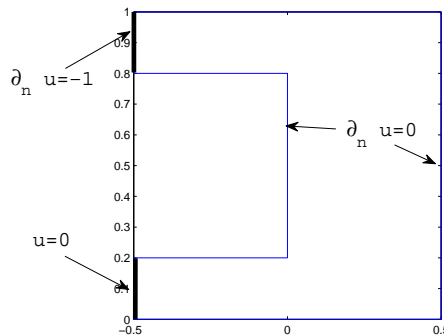


FIGURE 4.5 – Conducteur en U

#### Conducteur en S

Nous considérons maintenant un conducteur en forme de S (voir figure 4.7). La fonction coût est inchangée. Là encore, nous obtenons un domaine régulier.



FIGURE 4.6 – Conducteur en U sans contrainte (gauche) et avec contrainte (droite).

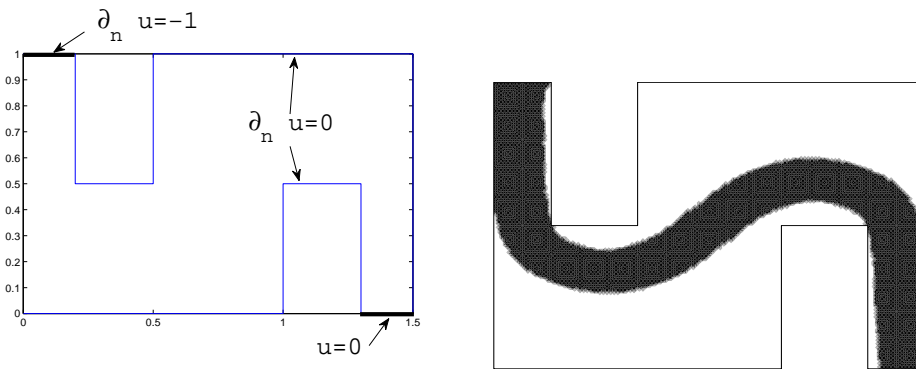


FIGURE 4.7 – Conducteur en S avec contrainte.

### 4.3.3 Résultats numériques pour la contrainte de Von Mises en élasticité linéaire

En mécanique des structures, un critère couramment utilisé pour garantir le comportement élastique du matériau est la contrainte de Von Mises

$$\sigma_M(u) = \sqrt{\frac{1}{2}B\sigma(u).e(u)},$$

avec

$$B = 6\mu\mathbb{I} + (\lambda - 2\mu)(I \otimes I), \quad (4.34)$$

$\lambda$  et  $\mu$  les coefficients de Lamé,  $\sigma(u)$  le tenseur des contraintes normalisé à un module d'Young unitaire et  $e(u)$  le tenseur des déformations. Pour réaliser la contrainte  $\sigma_M(u)^2 \leq M$  p.p. dans  $\Omega$ , comme pour le laplacien, nous introduisons la fonctionnelle de pénalité

$$J_\Omega(u) = \int_{\bar{D}} \alpha_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2}B\sigma(u).e(u)\right) dx. \quad (4.35)$$

Ici encore,  $\alpha_\Omega$  est la densité définie par (4.24) et  $\Phi$  est choisie de la forme (4.28). Le calcul de la dérivée topologique de  $J_\Omega$  est assez compliqué, voir [16]. Signalons simplement que son expression fait intervenir une fonction non explicite qui dépend cette fois de deux variables (en dimension 2), à savoir les contraintes principales. Cette fonction est échantillonnée de la même manière que précédemment, mais dans le plan.

Nous présentons deux exemples obtenus avec l'algorithme 4.3. La fonction coût est toujours définie par (4.33) avec  $K_\Omega(u_\Omega)$  la compliance. Le premier est celui de la poutre en L, voir figure 4.8. Le deuxième est une structure en U, voir figure 4.9. Là encore, la méthode est caractérisée par l'arrondissement des coins rentrants.

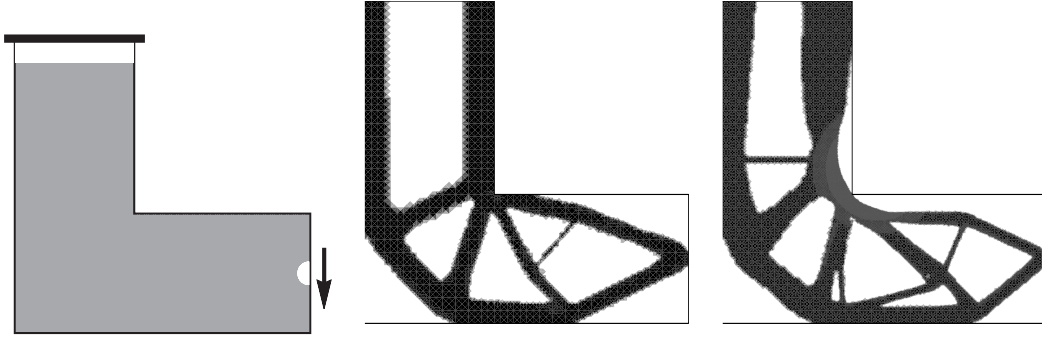


FIGURE 4.8 – Poutre en L : cas sans contrainte (milieu) et avec contrainte (droite).

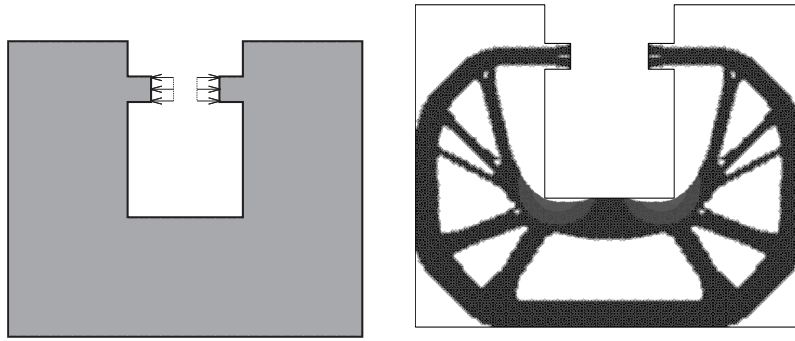


FIGURE 4.9 – Structure en U avec contrainte.

## 4.4 Prise en compte d'une contrainte sur le périmètre [1, 19]

### 4.4.1 Périmètre régularisé

L'introduction d'une contrainte de majoration du périmètre est une technique de régularisation couramment utilisée en optimisation de formes. Elle permet notamment de garantir l'existence de domaines optimaux pour un grand nombre de fonctions coût [36, 48]. Malheureusement, si le périmètre s'insère très bien dans le cadre de l'optimisation de formes classique où sa dérivée est la courbure moyenne, il est beaucoup plus difficile à gérer en optimisation topologique. Cela provient du fait que, lorsque l'on crée un trou  $B(z, \varepsilon)$  dans un domaine  $\Omega$ , la variation du périmètre de  $\Omega$  est  $|\partial B(z, \varepsilon)| = \varepsilon^{N-1} |\partial B(0, 1)|$ , alors que les fonctions coût traditionnelles varient en  $\varepsilon^N$ . Cette différence d'ordre de grandeur implique que la dérivée topologique du périmètre est infinie, et donc que l'on ne créera jamais de trou avec un algorithme utilisant la dérivée topologique comme direction de descente. Pour pallier à cela, nous introduisons un périmètre régularisé  $\text{Per}_\varepsilon$  défini de la façon suivante :

$$\text{Per}_\varepsilon(\Omega) = \frac{1}{\kappa_m \varepsilon} \|u - u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2, \quad (4.36)$$

où  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $u$  est la fonction caractéristique de  $\Omega$ ,  $u_\varepsilon \in H^m(\mathbb{R}^N)$  est solution de l'équation de diffusion

$$\varepsilon^{2m} (-\Delta)^m u_\varepsilon + u_\varepsilon = u,$$

et

$$\kappa_m = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^{4m-2}}{(1+t^{2m})^2} dt.$$

En particulier, pour  $m = 1$ , nous avons  $\kappa_1 = 1/4$ . Cette approche est justifiée par la formule asymptotique suivante [1].

**Théorème 4.4** *Si  $\partial\Omega$  est de classe  $C^2$ , alors, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,*

$$\text{Per}_\varepsilon(\Omega) = \text{Per}(\Omega) + O(\varepsilon^{\frac{2}{N+2}}), \quad (4.37)$$

où  $\text{Per}(\Omega) = |\partial\Omega|$  est le périmètre de  $\Omega$ .

Ce résultat s'étend au cas d'un problème aux limites dans un domaine  $D$  en définissant (pour  $m = 1$ )  $u_\varepsilon$  par

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = u & \text{dans } D, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial D, \end{cases} \quad (4.38)$$

et la fonctionnelle régularisée par

$$\text{Per}_\varepsilon(\Omega) = \frac{1}{\kappa_m \varepsilon} \|u - u_\varepsilon\|_{L^2(D)}^2. \quad (4.39)$$

Nous montrons que le développement asymptotique (4.37) reste valable pourvu que  $\Omega \subset\subset D$  ou  $D \setminus \overline{\Omega} \subset\subset D$ , et que  $\text{Per}(\Omega)$  soit défini comme le périmètre relatif de  $\Omega$  dans  $D$ , à savoir  $\text{Per}(\Omega) = |\partial\Omega \cap D|$ . La validité de la formule en présence de jonctions entre  $\partial\Omega$  et  $\partial D$  est une conjecture.

#### 4.4.2 Méthode de résolution

Ces résultats conduisent à une méthode naturelle de résolution de problèmes du type

$$\inf_{\Omega \subset D} J(\Omega) + \alpha \text{Per}(\Omega).$$

Elle consiste à définir une suite de paramètres  $\varepsilon_k$  tendant vers 0, puis à résoudre successivement les problèmes régularisés, où  $\text{Per}(\Omega)$  est remplacé par  $\text{Per}_{\varepsilon_k}(\Omega)$ , en partant du domaine obtenu à l'étape précédente.

Pour résoudre les problèmes d'optimisation topologique à  $\varepsilon_k$  fixé, nous utilisons l'algorithme de la section 3.3. Cela nécessite le calcul de la dérivée topologique de la fonctionnelle  $\text{Per}_\varepsilon$ , ce qui n'est pas très difficile, vu que dans (4.38) le domaine intervient au second membre. Nous obtenons le développement asymptotique

$$\text{Per}_\varepsilon(\tilde{\Omega}) - \text{Per}_\varepsilon(\Omega) = \int_D \text{Per}'_\varepsilon(\Omega) (\chi_{\tilde{\Omega}} - \chi_\Omega) dx + o(\|\chi_{\tilde{\Omega}} - \chi_\Omega\|_{L^1(D)}), \quad (4.40)$$

où la dérivée topologique  $\text{Per}'_\varepsilon(\Omega)$  est donnée par

$$\text{Per}'_\varepsilon(\Omega) = \frac{4}{\varepsilon} [1 + 2(p_\varepsilon - u_\varepsilon)],$$

avec l'état adjoint  $p_\varepsilon$  solution de

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta p_\varepsilon + p_\varepsilon = u_\varepsilon - u & \text{in } D, \\ \partial_n p_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial D. \end{cases}$$

#### 4.4.3 Exemples numériques

Afin de bien visualiser le rôle de la fonctionnelle  $\text{Per}_\varepsilon$ , nous prenons la fonction coût très simple

$$J(\Omega) = \int_\Omega w dx,$$

avec  $w \in L^1(D)$  donné. Le domaine de calcul est le carré unité  $D = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . La suite de paramètres de régularisation est  $\varepsilon_k = 1/2^k$ ,  $k = 0, \dots, 14$ . Nous présentons deux exemples. Le premier (voir figure 4.10) correspond à la fonction

$$w(x_1, x_2) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0.2 \leq x_1, x_2 \leq 0.8, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'effet du terme de périmètre est clairement mis en évidence par l'arrondissement des coins. Pour faire apparaître des changements de topologie nous prenons comme deuxième exemple (voir figure 4.11)

$$w(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{2\pi x_1}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi x_2}{3}\right).$$

On s'aperçoit ici que le terme de périmètre, en plus de lisser les bords, modifie la topologie.



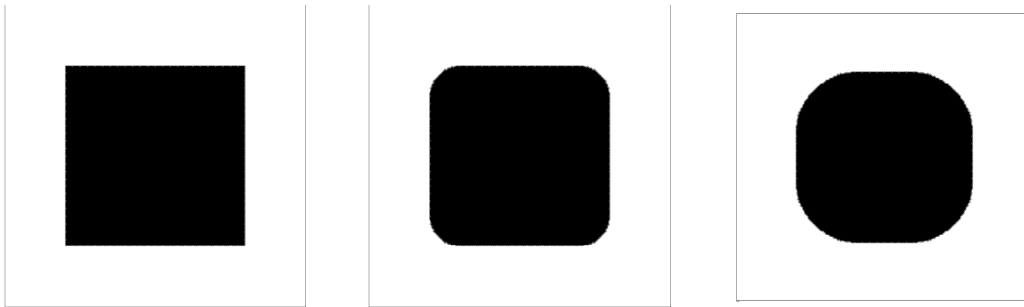


FIGURE 4.10 – Exemple 1 :  $\alpha = 0$  (à gauche),  $\alpha = 0.1$  (au milieu),  $\alpha = 0.2$  (à droite).

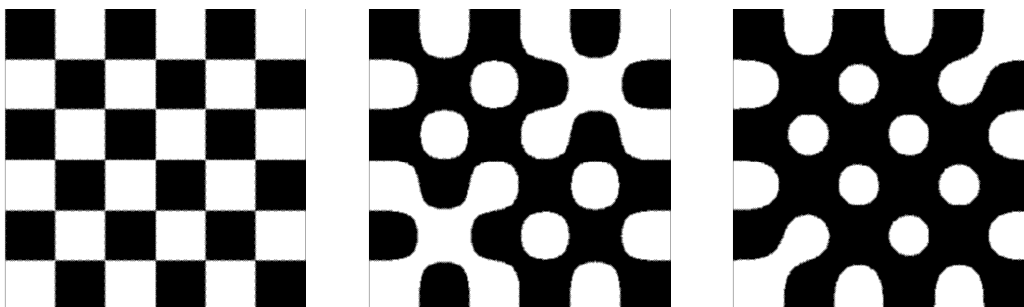


FIGURE 4.11 – Exemple 2 :  $\alpha = 0$  (à gauche),  $\alpha = 0.01$  (au milieu),  $\alpha = 0.02$  (à droite).

#### 4.4.4 Remarque et prolongements

Les approximations classiques du périmètre, comme celle de Modica-Mortola [55], ont l'avantage de ne pas introduire d'EDP. La contrepartie est que, du à l'absence de régularisation, elles n'admettent pas de dérivée topologique.

Dans un travail récent [19], nous allons plus loin en établissant la  $\Gamma$ -convergence d'une variante de la fonctionnelle (4.39) vers le périmètre relatif en dimension 2. Avec les mêmes notations que précédemment, pour  $m = 1$ , cette fonctionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\varepsilon(u) &= 2 \inf_{v \in H^1(D)} \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(D)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left( \|v\|_{L^2(D)}^2 + \int_D u(1-2v) dx \right) \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \int_D (1-u_\varepsilon) u dx. \end{aligned}$$

En plus d'approcher le périmètre, cette fonctionnelle, qui est définie même si  $u$  n'est pas une fonction caractéristique, force les valeurs 0 – 1 lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, et peut donc être associée à un problème relaxé. En exploitant cette propriété ainsi que la structure particulière de  $\tilde{F}_\varepsilon$  définie en tant que minimum, nous introduisons des algorithmes adaptés à la résolution de problèmes de moindre carrés et de minimisation de la compliance avec pénalisation du périmètre. La figure 4.12 montre quelques résultats obtenus pour la minimisation de la compliance à l'aide d'un algorithme alterné appliqué au problème homogénéisé. Il s'agit du classique problème de la console. Rappelons pour finir que, si aucun modèle relaxé convenable n'est connu, le problème non relaxé peut toujours être traité directement par dérivée topologique, de la même façon qu'au paragraphe 4.4.2.

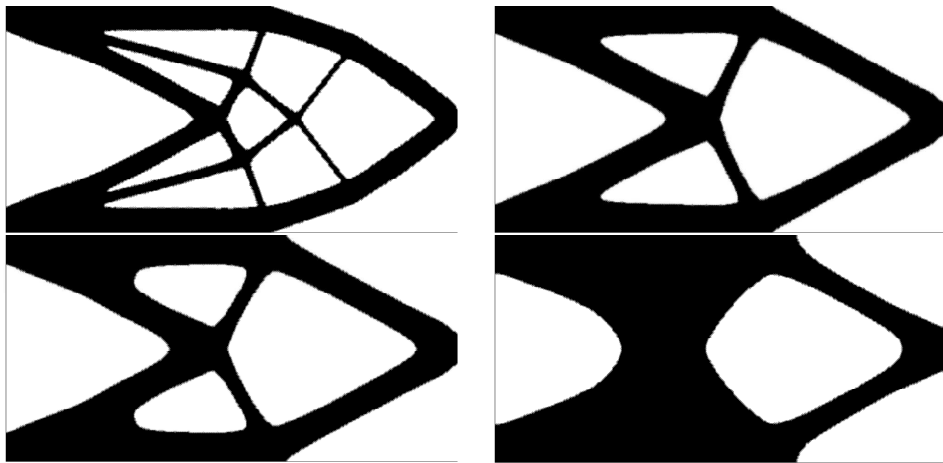


FIGURE 4.12 – Console pour les valeurs respectives de  $4\alpha$  : 0.1, 5, 10 et 50.

# Chapitre 5

## Méthodes de type Newton pour l'optimisation topologique

### 5.1 Un problème de contrôle linéaire de type bang-bang sans contrainte [6]

#### 5.1.1 Introduction

Les méthodes d'optimisation topologiques présentées jusqu'ici étaient du premier ordre : seule la dérivée topologique première était prise en compte. Il existe une notion de dérivée topologique seconde, obtenue en poussant le développement asymptotique (1.3) jusqu'à l'ordre suivant [41]. Certains termes d'ordre supérieurs ont même été calculés [34, 35] pour résoudre des problèmes d'identification de petites inhomogénéités. Pour traiter de véritables problèmes d'optimisation topologique, nous souhaitons mettre en oeuvre une méthode de type Newton. La façon d'y incorporer les dérivées topologiques secondes est loin d'être évidente. A cela il y a deux raisons principales. La première est que la condition d'optimalité topologique est une condition de positivité de la dérivée topologique, et non de nullité. La seconde est que la dérivée topologique ne fournit la variation première de la fonction coût que pour des perturbations particulières. Nous allons surmonter la première difficulté grâce à une astuce assez classique : l'équivalence  $x \geq 0 \Leftrightarrow \min(0, x) = 0$ . Quant à la seconde, nous allons nous limiter à des problèmes pour lesquels la variation première de la fonction coût est indépendante de la forme de la perturbation. C'est le cas lorsque la perturbation intervient sur les coefficients  $F$  ou  $\beta$ , avec les notations de (2.9), d'après le théorème 2.2.

#### 5.1.2 Description et analyse de la méthode

Nous nous intéressons au problème modèle

$$\underset{(u,y) \in \mathcal{E} \times H_0^1(D)}{\text{Minimiser}} J(u, y) = \frac{1}{2} \int_D (y - y^\dagger)^2 dx + \nu \int_D u dx \quad \text{avec } Ey = u. \quad (5.1)$$

L'ensemble admissible est défini par

$$\mathcal{E} = \{u_\Omega = \chi_\Omega \text{ p.p. dans } D, \Omega \subset D, \Omega \text{ mesurable}\},$$

où  $D$  est le domaine de calcul. Les données  $(y^\dagger, \nu)$  sont dans  $L^2(D) \times \mathbb{R}$  et  $E$  désigne l'opérateur  $-\Delta : H_0^1(D) \rightarrow H^{-1}(D)$ . En appliquant par exemple le théorème 2.2, nous obtenons les conditions nécessaires d'optimalité

$$\begin{cases} g_u \geq 0 \text{ dans } \text{Int}([u = 0]), \\ g_u \leq 0 \text{ dans } \text{Int}([u = 1]), \end{cases} \quad (5.2)$$

avec  $g_u = -z_u + \nu$  la dérivée (topologique) et  $z_u = -E^{-1}(y_u - y^\dagger)$  l'état adjoint. Le point clé de la méthode est la remarque suivante :

$$(5.2) \iff F(u) = 0 \text{ dans } \text{Int}([u = 0]) \cup \text{Int}([u = 1]),$$

avec

$$F(u) = u \max(0, g_u) + (1 - u) \min(0, g_u) = u|g_u| + \min(0, g_u). \quad (5.3)$$

Nous allons donc chercher à résoudre l'équation  $F(u) = 0$  par la méthode de Newton. Un obstacle apparent, qui n'en est en réalité pas un, est que la fonction  $F$  n'est évidemment pas différentiable au sens de Fréchet. Il existe en fait des notions plus faibles de différentiabilité parfaitement adaptées à la méthode de Newton. La plus générale est appelée "semi-smoothness" [51], mais nous nous contenterons de la propriété de "slant differentiability" (encore appelée "Newton differentiability", et que nous appellerons en français Newton différentiabilité) suivante [39, 50].

**Définition 5.1** Une fonction  $F : U \rightarrow Y$ , avec  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach et  $U$  un ouvert de  $X$ , est dite Newton différentiable s'il existe une fonction  $G : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ , appelée dérivée de Newton, telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|F(u+h) - F(u) - G(u+h)h\| = 0 \quad \forall u \in U.$$

L'intérêt pour nous de cette notion réside dans les deux résultats suivants [50].

**Théorème 5.1** La fonction  $\max(0, \cdot) : L^q(D) \rightarrow L^p(D)$  avec  $1 \leq p < q \leq +\infty$  est Newton différentiable sur  $L^q(D)$  et  $u \mapsto \chi_{[u>0]}$  est une dérivée de Newton.

**Théorème 5.2** Supposons que  $u^*$  vérifie  $F(u^*) = 0$  et que  $F$  est Newton différentiable sur un ouvert  $U$  contenant  $u^*$ , de dérivée de Newton  $G$ . Si  $G(u)$  est inversible pour tout  $u \in U$  et  $\{\|G(u)^{-1}\|, u \in U\}$  est borné, alors l'algorithme de Newton

$$u_{n+1} = u_n - G(u_n)^{-1}F(u_n)$$

converge surlinéairement vers  $u^*$  dès que  $\|u_0 - u^*\|$  est suffisamment petit.

Malheureusement, il se trouve que la fonction  $F$  définie par (5.3) est bien Newton différentiable de  $L^2(D)$  dans lui-même, mais ne vérifie pas l'hypothèse d'inversibilité uniforme. Pour y remédier nous introduisons la fonction régularisée

$$\begin{aligned} F^\varepsilon : L^2(D) &\rightarrow L^2(D) \\ u &\mapsto u(\Phi_\varepsilon \circ g_u) + \min(0, g_u), \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec

$$\Phi_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon^2 + t^2}. \quad (5.5)$$

Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, la fonction  $F^\varepsilon$  vérifie toutes les conditions requises, et nous obtenons les résultats d'existence et de convergence suivants.

**Lemme 5.3** Pour tout  $\varepsilon > 0$  l'équation  $F^\varepsilon(u^\varepsilon) = 0$  admet au moins une solution  $u^\varepsilon \in L^2(D)$ . De plus, chaque solution  $u^\varepsilon \in L^2(D)$  de  $F^\varepsilon(u^\varepsilon) = 0$  vérifie

$$0 \leq u^\varepsilon \leq 1. \quad (5.6)$$

**Théorème 5.4** Supposons que  $u^\varepsilon \in L^2(D)$  vérifie  $F^\varepsilon(u^\varepsilon) = 0$ . Alors l'algorithme de Newton

$$u_{n+1} = u_n - G^\varepsilon(u_n)^{-1}F^\varepsilon(u_n)$$

converge surlinéairement vers  $u^\varepsilon$  dans  $L^2(D)$  dès que  $\|u_0 - u^\varepsilon\|$  est suffisamment petit.

La méthode proposée consiste à appliquer l'algorithme de Newton "semismooth" ci-dessus à une suite de sous-problèmes générés par des paramètres  $\varepsilon_k$  tendant vers 0. Nous avons le résultat de convergence suivant.

**Théorème 5.5** Soit  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de paramètres strictement positifs tels que  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . Pour tout  $k$  considérons une solution  $u^{\varepsilon_k} \in L^2(D)$  de  $F^{\varepsilon_k}(u^{\varepsilon_k}) = 0$  et posons  $y^{\varepsilon_k} = E^{-1}u^{\varepsilon_k}$ .

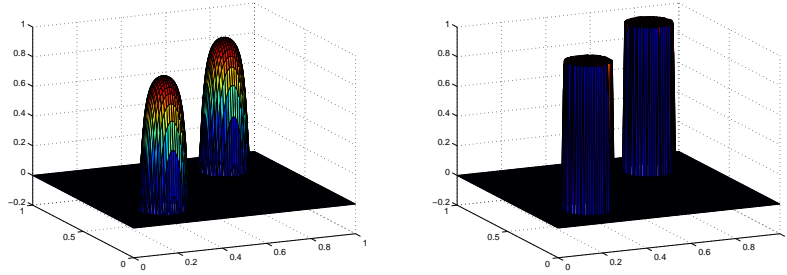


FIGURE 5.1 – Contrôle  $u^\varepsilon$  à convergence des itérations 1 (gauche) and 10 (droite).

1. Il existe une suite extraite  $(\varepsilon_{k_p})$  et  $u^* \in L^2(D, [0, 1])$  tels que

$$u^{\varepsilon_{k_p}} \xrightarrow{L^2(D)} u^*, \quad y^{\varepsilon_{k_p}} \xrightarrow{L^2(D)} y^* := E^{-1}u^*,$$

$$u^{\varepsilon_{k_p}} \rightarrow \chi_{[g_{u^*} < 0]} \text{ p.p. dans } [g_{u^*} \neq 0].$$

Si  $\mathcal{L}^2([g_{u^*} = 0]) = 0$ , alors

$$u^{\varepsilon_{k_p}} \rightarrow u^* = \chi_{[g_{u^*} < 0]} \text{ p.p. dans } D \quad \text{et} \quad u^{\varepsilon_{k_p}} \xrightarrow{L^2(D)} u^*. \quad (5.7)$$

En particulier,  $F(u^*) = 0$  et  $(u^*, y^*)$  est une solution de (5.1).

2. Chaque point d'accumulation  $u^*$  de la suite  $(u^{\varepsilon_k})$  dans  $L^2(D)$  vérifie  $F(u^*) = 0$ .

**Remarque 5.2** Le problème (5.1) a été posé dans l'ensemble des fonctions caractéristiques  $\mathcal{E}$ , mais, à condition que  $-\Delta y^\dagger = 0$  dans  $D$ , on aurait pu le formuler de manière équivalente dans l'ensemble convexe  $\tilde{\mathcal{E}} := L^\infty(D, [0, 1])$ . Plus précisément, on montre facilement que toute solution du problème convexe vérifie automatiquement  $\text{Int}[0 < u < 1] = \emptyset$ . De plus, résoudre  $F(u) = 0$  revient exactement à résoudre le problème convexe.

### 5.1.3 Un exemple numérique

La version discrète de l'algorithme ainsi que les détails de l'implémentation sont discutés dans [6]. Signalons simplement que la suite  $(\varepsilon_k)$  est définie par

$$\varepsilon_k = \min(\varepsilon_{k-1}, a \|g_{u^{\varepsilon_{k-1}}}\| r^{k-1})$$

avec  $a > 0$ ,  $0 < r < 1$  et  $\varepsilon_0 = a \|g_{u^{\varepsilon_0}}\|$ . En pratique nous prenons  $a = 10^{-3}$ ,  $r = 0.5$  et  $k = 1, \dots, 10$ . Les divers tests numériques mettent d'ailleurs en évidence un fait surprenant : l'algorithme semble toujours converger, quelles que soient l'initialisation et la vitesse de décroissance de la suite  $(\varepsilon_k)$ . Ce phénomène est certainement lié au caractère fortement régularisant de l'opérateur contrôle-état dans notre cas.

Nous ne montrons ici qu'un exemple. Le domaine de calcul est le carré unité  $D = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , et les données sont

$$y^\dagger(x_1, x_2) = \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2), \quad \nu = 10^{-2}.$$

Les contrôles  $u^{\varepsilon_1}$  et  $u^{\varepsilon_{10}}$  à convergence de l'algorithme de Newton pour les itérations 1 et 10 sont représentés sur la figure 5.1. L'historique de convergence du résidu  $\|F(u^{\varepsilon_k})\|$  est indiqué sur la figure 5.2.

## 5.2 Cas d'un problème semi-linéaire avec contrainte [15]

En terme de performance, pour les problèmes linéaires sans contraintes traités précédemment, la méthode de Newton semismooth s'avère être sensiblement supérieure à l'algorithme de la section

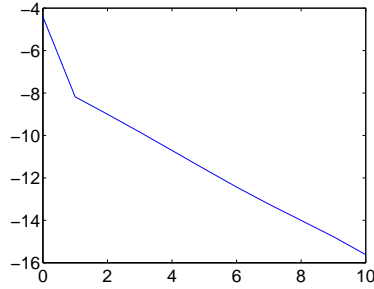


FIGURE 5.2 – Historique de convergence de  $\log_{10} \|F(u^{\varepsilon_k})\|^2$ .

3.3. La nécessité de résoudre une suite de problèmes se trouve avantageusement compensée par la convergence localement surlinéaire et l'absence de recherche de pas. Le gain de performance est encore plus significatif en présence de contraintes, car les méthodes de type Uzawa (cf section 4.2) sont lentes.

Pour donner une idée de la façon de procéder, considérons toujours le problème (5.1), mais avec une contrainte de volume, c'est-à-dire

$$\inf_{(u,y) \in \mathcal{E} \times H_0^1(D)} J(u,y) = \frac{1}{2} \int_D (y - y^\dagger)^2 dx \quad \text{avec } Ey = u \text{ et } \int_D u dx = V.$$

Le système d'optimalité est le même qu'avant, mais le multiplicateur de Lagrange  $\nu$  fait maintenant partie des inconnues. Nous allons donc résoudre

$$R(u,\nu) := \begin{pmatrix} F(u,\nu) \\ \int_D u dx - V \end{pmatrix} = 0$$

avec

$$F(u,\nu) = u \max(0, g_{u,\nu}) + (1-u) \min(0, g_{u,\nu}),$$

$$g_{u,\nu} = E^{-1}(E^{-1}u - y^\dagger) + \nu.$$

Notons que l'équation d'état  $Ey = u$  a été éliminée du système du fait de son caractère linéaire et inversible, mais pour des problèmes non linéaires on doit la traiter en ajoutant une ligne au système, et faire de même pour l'équation adjointe. A cause du problème récurrent de non inversibilité du jacobien, nous appliquons la méthode de Newton au système régularisé

$$R^\varepsilon(u,\nu) := \begin{pmatrix} F^\varepsilon(u,\nu) \\ \int_D u dx - V \end{pmatrix} = 0,$$

et faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0. La fonction  $F^\varepsilon$  peut être définie comme dans (5.4). Une variante ayant des propriétés analogues mais faisant jouer un rôle symétrique aux deux phases est la fonction

$$F^\varepsilon(u,\nu) = u \max(0, g_{u,\nu} + \varepsilon) + (1-u) \min(0, g_{u,\nu} - \varepsilon).$$

L'analyse de convergence de cette méthode est effectuée dans [15] pour une classe de problèmes semi-linéaires. Les tests numériques montrent que, en plus de sa rapidité par rapport aux méthodes du premier ordre, elle se caractérise par une réalisation très précise de la contrainte.

# Publications de l'auteur

- [1] S. Amstutz. Regularized perimeter for topology optimization. *Submitted*.
- [2] S. Amstutz. The topological asymptotic for the Navier-Stokes equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 11(3) :401–425 (electronic), 2005.
- [3] S. Amstutz. Sensitivity analysis with respect to a local perturbation of the material property. *Asymptot. Anal.*, 49(1-2) :87–108, 2006.
- [4] S. Amstutz. Topological sensitivity analysis for some nonlinear PDE system. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 85(4) :540–557, 2006.
- [5] S. Amstutz. A penalty method for topology optimization subject to a pointwise state constraint. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 16(3) :523–544, 2010.
- [6] S. Amstutz. A semismooth Newton method for topology optimization. *Nonlinear Anal.*, 73(6) :1585–1595, 2010.
- [7] S. Amstutz. Analysis of a level-set method for topology optimization. *Optim. Meth. Soft.*, 26(4-5) :555–573, 2011.
- [8] S. Amstutz. Augmented lagrangian for cone constrained topology optimization. *Comput. Optim. Appl.*, 49(1) :101–122, 2011.
- [9] S. Amstutz. Connections between topological sensitivity analysis and material interpolation schemes in topology optimization. *Struct. Multidisc. Optim.*, 43(6) :755–765, 2011.
- [10] S. Amstutz and H. Andrä. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *J. Comput. Phys.*, 216(2) :573–588, 2006.
- [11] S. Amstutz and M. Ciligot-Travain. Optimality conditions for shape and topology optimization subject to a cone constraint. *SIAM J. Control Optim.*, 48(6) :4056–4077, 2010.
- [12] S. Amstutz and N. Dominguez. Topological sensitivity analysis in the context of ultrasonic nondestructive testing. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, 32 :936–947, 2008.
- [13] S. Amstutz, S. Giusti, A. A. Novotny, and E. A. D. Neto. Topological derivative for multi-scale linear elasticity models applied to the synthesis of microstructures. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 84(6) :733–756, 2010.
- [14] S. Amstutz, I. Horchani, and M. Masmoudi. Crack detection by the topological gradient method. *Control Cybern.*, 34 :81–101, 2005.
- [15] S. Amstutz and A. Laurain. A semismooth Newton method for a class of semilinear optimal control problems with box and volume constraints. *Submitted*.
- [16] S. Amstutz and A. A. Novotny. Topological optimization of structures subject to Von Mises stress constraints. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 41(3) :407–420, 2010.
- [17] S. Amstutz and A. A. Novotny. Topological asymptotic analysis of the Kirchhoff plate bending problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 17(3) :705–721, 2011.
- [18] S. Amstutz, T. Takahashi, and B. Vexler. Topological sensitivity analysis for time-dependent problems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 14(3) :427–455, 2008.
- [19] S. Amstutz and N. Van Goethem. Topology optimization methods with gradient-free perimeter approximation. *Submitted*.
- [20] E. A. D. Neto, S. Amstutz, S. Giusti, and A. A. Novotny. Topological derivative-based optimization of micro-structures considering different multi-scale models. *CMES*, 62(1) :23–56, 2010.

- [21] B. Samet, S. Amstutz, and M. Masmoudi. The topological asymptotic for the Helmholtz equation. *SIAM J. Control Optim.*, 42(5) :1523–1544 (electronic), 2003.



# Bibliographie générale

- [22] G. Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [23] G. Allaire. *Conception optimale de structures*, volume 58 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. With the collaboration of Marc Schoenauer (INRIA) in the writing of Chapter 8.
- [24] G. Allaire, F. de Gournay, F. Jouve, and A.-M. Toader. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control Cybern.*, 34 :59–80, 2005.
- [25] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *J. Comput. Phys.*, 194(1) :363–393, 2004.
- [26] H. Ammari and H. Kang. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, volume 1846 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [27] H. Ammari and H. Kang. Reconstruction of elastic inclusions of small volume via dynamic measurements. *Appl. Math. Optim.*, 54(2) :223–235, 2006.
- [28] H. Ammari and H. Kang. *Polarization and moment tensors*, volume 162 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2007. With applications to inverse problems and effective medium theory.
- [29] H. Ammari and A. Khelifi. Electromagnetic scattering by small dielectric inhomogeneities. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(7) :749–842, 2003.
- [30] M. P. Bendsoe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct. Optim.*, 1 :193–202, 1989.
- [31] M. P. Bendsoe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Arch. Appl. Mech.*, 69 :635–654, 1999.
- [32] M. P. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Theory, methods and applications.
- [33] M. Bergounioux and K. Kunisch. On the structure of Lagrange multipliers for state-constrained optimal control problems. *Systems Control Lett.*, 48(3-4) :169–176, 2003. Optimization and control of distributed systems.
- [34] M. Bonnet. Inverse acoustic scattering by small-obstacle expansion of a misfit function. *Inverse Problems*, 24(3) :035022, 27, 2008.
- [35] M. Bonnet. Higher-order topological sensitivity for 2-D potential problems. Application to fast identification of inclusions. *Internat. J. Solids Structures*, 46(11-12) :2275–2292, 2009.
- [36] D. Bucur and G. Buttazzo. *Variational methods in shape optimization problems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 65. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2005.
- [37] J. Céa, S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The shape and topological optimizations connection. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188(4) :713–726, 2000. IV WCCM, Part II (Buenos Aires, 1998).
- [38] D. J. Cedio-Fengya, S. Moskow, and M. S. Vogelius. Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction. *Inverse Problems*, 14(3) :553–595, 1998.

- [39] X. Chen, Z. Nashed, and L. Qi. Smoothing methods and semismooth methods for nondifferentiable operator equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(4) :1200–1216 (electronic), 2000.
- [40] A. Cherkaev. *Variational methods for structural optimization*, volume 140 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [41] J. R. de Faria, A. A. Novotny, R. A. Feijóo, E. Taroco, and C. Padra. Second order topological sensitivity analysis. *Internat. J. Solids Structures*, 44(14-15) :4958–4977, 2007.
- [42] H. Eschenauer, V. V. Kobelev, and A. Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural optimization*, 8 :42–51, 1994.
- [43] A. Friedman and M. Vogelius. Identification of small inhomogeneities of extreme conductivity by boundary measurements : a theorem on continuous dependence. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(4) :299–326, 1989.
- [44] S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case. *SIAM J. Control Optim.*, 39(6) :1756–1778 (electronic), 2001.
- [45] P. Guillaume and K. Sid Idris. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM J. Control Optim.*, 41(4) :1042–1072 (electronic), 2002.
- [46] P. Guillaume and K. Sid Idris. Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations. *SIAM J. Control Optim.*, 43(1) :1–31 (electronic), 2004.
- [47] M. Hassine and M. Masmoudi. The topological asymptotic expansion for the quasi-Stokes problem. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(4) :478–504 (electronic), 2004.
- [48] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer, Berlin, 2005. Une analyse géométrique. [A geometric analysis].
- [49] M. Hintermüller. Fast level set based algorithms using shape and topological sensitivity information. *Control Cybernet.*, 34(1) :305–324, 2005.
- [50] M. Hintermüller, K. Ito, and K. Kunisch. The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. *SIAM J. Optim.*, 13(3) :865–888 (electronic) (2003), 2002.
- [51] M. Hinze, R. Pinnau, M. Ulbrich, and S. Ulbrich. *Optimization with PDE constraints*, volume 23 of *Mathematical Modelling : Theory and Applications*. Springer, New York, 2009.
- [52] K. Ito, K. Kunisch, and G. H. Peichl. Variational approach to shape derivatives. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 14(3) :517–539, 2008.
- [53] H. Kang and K. Kim. Anisotropic polarization tensors for ellipses and ellipsoids. *J. Comput. Math.*, 25(2) :157–168, 2007.
- [54] M. Masmoudi. The topological asymptotic. In *Computational Methods for Control Applications*, GAKUTO. 2002.
- [55] L. Modica and S. Mortola. Un esempio di  $\Gamma^-$ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)*, 14(1) :285–299, 1977.
- [56] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied shape optimization for fluids*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2001. Oxford Science Publications.
- [57] F. Murat and J. Simon. Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique. *Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris 6*, pages 1–46, 1974.
- [58] H.-M. Nguyen and M. S. Vogelius. A representation formula for the voltage perturbations caused by diametrically small conductivity inhomogeneities. Proof of uniform validity. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(6) :2283–2315, 2009.
- [59] S. Osher and R. Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [60] O. Pironneau. *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [61] G. Pólya and G. Szegő. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Annals of Mathematics Studies, no. 27. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

- [62] J. Pommier and B. Samet. The topological asymptotic for the Helmholtz equation with Dirichlet condition on the boundary of an arbitrarily shaped hole. *SIAM J. Control Optim.*, 43(3) :899–921 (electronic), 2004.
- [63] M. Schiffer and G. Szegő. Virtual mass and polarization. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 :130–205, 1949.
- [64] A. Schumacher. Topologieoptimierung von bauteilstrukturen unter verwendung von lopschpositionierungskriterien. *Ph.D. thesis, Univ. of Siegen*, 1995.
- [65] M. Shoenauer, L. Kallel, and F. Jouve. Mechanics inclusions identification by evolutionary computation. *Revue européenne des éléments finis*, 5(5,6) :619–648, 1996.
- [66] O. Sigmund. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Struct. Multidisc. Optim.*, 21 :120–127, 2001.
- [67] J. Sokołowski and A. Żochowski. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control Optim.*, 37(4) :1251–1272 (electronic), 1999.
- [68] J. Sokołowski and J.-P. Zolésio. *Introduction to shape optimization*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Shape sensitivity analysis.
- [69] M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(1-2) :227–246, 2003.