

Numéro d'ordre : 709

Thèse

présentée en vue de l'obtention du

Doctorat de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Samuel AMSTUTZ

Aspects théoriques et numériques en optimisation de forme topologique

Soutenue le 9 décembre 2003 devant le Jury :

Grégoire	ALLAIRE	Professeur Ecole Polytechnique	(rapporteur)
Abderrahmane	BENDALI	Professeur INSA de Toulouse	(examineur)
Philippe	<u>GUILLAUME</u>	Professeur INSA de Toulouse	(directeur)
Mohamed	JAOUA	Professeur Université de Nice	(président)
Mohamed	MASMOUDI	Professeur Université de Toulouse III	(examineur)
Jean-Pierre	RAYMOND	Professeur Université de Toulouse III	(examineur)
Enrique	ZUAZUA	Professeur Université Autonome de Madrid	(rapporteur)

Laboratoire : Mathématiques pour l'Industrie et la Physique, UMR 5640,
UFR MIG, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France

Remerciements

Je voudrais remercier en premier lieu Philippe Guillaume, mon directeur de thèse, pour la pertinence de ses conseils et la disponibilité dont il a fait preuve malgré les responsabilités administratives qu'il occupait à la tête du département de mathématiques de l'INSA. Ma reconnaissance va également à Mohamed Masmoudi qui a été à mes côtés tout au long de ces trois années. Disposer de son soutien et de ses idées m'a beaucoup aidé.

J'exprime ma gratitude aux rapporteurs Grégoire Allaire et Enrique Zuazua pour avoir eu le courage de lire l'intégralité de ce document. Je suis honoré du grand intérêt qu'ils ont porté à la compréhension détaillée de chaque chapitre. Leurs nombreux commentaires ont donné lieu à d'importantes améliorations.

Je suis aussi gré à messieurs Bendali, Jaoua et Raymond d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Leurs remarques lors même de la soutenance seront très certainement une source d'idées pour de futurs travaux.

Enfin, je salue tous les membres du laboratoire MIP que j'ai côtoyé et qui ont contribué à y faire régner une ambiance cordiale. Je pense en particulier à mes collègues de bureau successifs : Sandrine Bargiacchi et Milagros van Grieken dont le sourire et la bonne humeur semblent inaltérables ; Julien Pommier et Bessem Samet qui ont également travaillé sur l'asymptotique topologique et avec lesquels j'ai eu des discussions scientifiques nombreuses et très enrichissantes, concernant notamment les aspects numériques avec Julien et les aspects théoriques avec Bessem.

Table des matières

1 Synthèse des travaux	7
1.1 Introduction générale	7
1.2 Présentation d'un problème modèle et notations	9
1.2.1 Le problème initial	10
1.2.2 Le problème perturbé	10
1.2.3 La fonction coût	10
1.2.4 Formulation variationnelle	10
1.3 Utilisation d'une méthode adjointe : différentes possibilités	11
1.3.1 La méthode adjointe généralisée et la troncature de domaine	11
1.3.2 Une méthode adjointe pour les problèmes de Neumann	13
1.3.3 Une méthode adjointe pour les problèmes de Dirichlet	15
1.3.4 Comparaisons des approches avec et sans troncature	17
1.4 Estimation de la solution	17
1.4.1 Calcul explicite de la solution	18
1.4.2 Approximation par la solution d'une équation intégrale	18
1.4.3 Conclusion : choix de la méthode	22
1.5 Les principaux résultats	22
1.5.1 L'équation de Laplace	22
1.5.2 L'équation de Helmholtz	23
1.5.3 Problèmes non linéaires	25
1.6 Aspects numériques	27
1.6.1 Deux façons d'utiliser le gradient topologique	27
1.6.2 Présentation des principaux tests réalisés	27
1.6.3 Bilan	30
1.7 Conclusion	30
References	31
2 Equation de Laplace 2D : localisation de fissures	33
2.1 Introduction	33
2.2 An adjoint method adapted to the topology optimization	34
2.3 The Poisson problem	35
2.3.1 Formulation of the problem	35
2.3.2 Heuristics	36
2.3.3 Straight crack	38
2.3.4 Proofs	39
2.4 Numerical applications	41

2.4.1	The inverse problem	42
2.4.2	The cost function and the topological gradient	42
2.4.3	Numerical results in one iteration without noise	43
2.4.4	Numerical results in one iteration with noise	44
2.4.5	Identification of cracks with incomplete data	47
2.4.6	An iterative method	47
2.5	Conclusion	49
2.6	Appendix : solution of the Laplace exterior problem for a crack	49
2.6.1	A weighted Sobolev space	49
2.6.2	The Neumann problem for a crack	49
	References	51
3	Equation de Helmholtz 2D avec condition de Dirichlet au bord d'un trou circulaire	53
3.1	Introduction	53
3.2	A generalized adjoint method	54
3.3	A wave guide problem	57
3.3.1	The domain truncation	58
3.3.2	Variation of the sesquilinear form	60
3.3.3	The asymptotic expansion	64
3.4	Numerical results	65
3.4.1	T-shaped waveguide	65
3.4.2	L-shaped waveguide	67
3.4.3	U-shaped waveguide	69
3.5	Appendix	70
3.5.1	Existence and uniqueness of solution	70
3.5.2	The inf-sup condition	74
3.5.3	Some useful inequalities	75
	References	77
4	Equation de Helmholtz 2D avec condition de Neumann au bord d'un trou de forme quelconque ou d'une fissure	79
4.1	Introduction	79
4.2	An adjoint method for the topology optimization with a Neumann condition	81
4.3	The topological asymptotic problem	82
4.3.1	Problem formulation	82
4.3.2	Well-posedness	83
4.4	Creation of a hole	85
4.4.1	Equivalent formulation of the initial problem in the perforated domain	85
4.4.2	Preliminary calculus	85
4.4.3	Heuristics	87
4.4.4	Circular hole	90
4.5	Creation of a Crack	90
4.5.1	Equivalent formulation of the initial problem in the cracked domain	90

4.5.2	Preliminary calculus	91
4.5.3	Heuristics	91
4.5.4	Straight crack	93
4.6	Particular cost functions	93
4.7	Numerical experiments	94
4.8	Proofs	95
4.8.1	Preliminary lemmas	95
4.8.2	Proof of Theorem 4.5 (Topological asymptotic for a hole)	101
4.8.3	Proof of Theorem 4.6 (Topological asymptotic for a crack) . . .	102
4.8.4	Proof of Theorem 4.7 (Examples of cost functions)	104
4.9	Appendix	104
4.9.1	Proof of Proposition 4.2 (Well-posedness)	104
4.9.2	Solution of exterior Laplace problems	105
4.9.3	A Poincaré inequality for perforated domains	108
	References	111
5	Equation de Helmholtz : insertion d'inhomogénéités diélectriques	113
5.1	Introduction	113
5.2	The adjoint method	114
5.3	Problem formulation	115
5.3.1	The Helmholtz problem	115
5.3.2	The cost function and the adjoint problem	116
5.4	The main result	117
5.4.1	Preliminary estimates	117
5.4.2	Variation of the sesquilinear form	119
5.4.3	The topological asymptotic expansion	122
5.5	Particular cases	122
5.5.1	Particular cost functions	122
5.5.2	Particular shaped dielectric objects	126
5.5.3	Metallic objects	127
5.6	Well-posedness	128
	References	129
6	Systèmes non linéaires avec condition de Dirichlet au bord d'un trou de forme quelconque	131
6.1	Introduction	131
6.2	Problem presentation	132
6.2.1	The initial problem	132
6.2.2	The perturbed problem	132
6.2.3	The topological sensitivity problem	133
6.3	An adjoint method	133
6.4	Main results	134
6.4.1	Topological sensitivity in 3D	134
6.4.2	Topological sensitivity in 2D	136
6.4.3	Generalization	138
6.4.4	Examples	139

6.4.5	Spherical hole (3D)	139
6.4.6	Particular cost functions	140
6.5	Proofs	141
6.5.1	Proof of theorem 6.2	141
6.5.2	Proof of theorem 6.3	143
6.5.3	Proof of theorem 6.4	146
	References	149
7	Equations de Navier-Stokes	151
7.1	Introduction	151
7.2	An adjoint method for the topology optimization with a Dirichlet condition	152
7.3	Topological asymptotic for the Navier-Stokes problem	154
7.3.1	Presentation of the problem	154
7.3.2	Well-posedness	154
7.3.3	Topological sensitivity in 3D	156
7.3.4	Topological sensitivity in 2D	159
7.3.5	Some examples of cost function	161
7.4	A numerical Example	162
7.5	Proofs	164
7.5.1	Preliminary lemmas	165
7.5.2	Proof of Theorem 7.2 (Topological sensitivity in 3D)	168
7.5.3	Proof of Theorem 7.3 (Topological sensitivity in 2D)	170
7.5.4	Proof of Theorem 7.4 (Examples of cost function)	173
	References	177
8	Complément sur les aspects numériques	179
8.1	Asymptotique topologique à l'ordre 2	180
8.1.1	Etats directs	180
8.1.2	Fonction coût et états adjoints	180
8.1.3	Hypothèses de variation de l'EDP	180
8.1.4	Variation de la fonction coût	181
8.1.5	Application à l'équation de Helmholtz	181
8.2	Construction d'une parabole avec des fissures	181
8.2.1	Modélisation du problème direct	182
8.2.2	Fonction coût et état adjoint	182
8.2.3	Calcul de l'orientation optimale des fissures	183
8.2.4	Construction d'une courbe optimale	184
8.2.5	Conclusion	185
8.3	Optimisation topologique en une itération	185
8.3.1	Une nouvelle orientation des fissures	185
8.3.2	Optimisation d'un guide d'onde	186
8.3.3	Inversion de forme pour un objet métallique	187
8.3.4	Inversion de forme pour un objet diélectrique	191
8.4	Algorithmes itératifs	191
8.4.1	Méthodes de type Krylov : cadre abstrait	191
8.4.2	Application à l'optimisation de forme	200

8.4.3	Optimisation du guide d'onde en T	201
8.4.4	Inversion de forme	206
8.4.5	Bilan	208
	References	211

A Espaces fonctionnels et équations intégrales pour l'équation de Laplace 2D **213**

A.1	Quelques espaces fonctionnels	213
A.1.1	Une généralisation de l'inégalité de Poincaré	213
A.1.2	Espaces fonctionnels quotients	214
A.1.3	Espaces $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$, $W^1(\Omega')$, $W_0^1(\Omega')$ et $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$	214
A.2	Equations intégrales pour les problèmes de trou	218
A.2.1	Les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur	218
A.2.2	Les problèmes de Neumann intérieur et extérieur	218
A.2.3	Solution élémentaire	218
A.2.4	Notion de saut	219
A.2.5	Potentiel de simple couche	219
A.3	Equations intégrales pour les fissures	222
A.3.1	Définitions	222
A.3.2	Les problèmes extérieurs	223
A.3.3	Potentiel de double couche	223
	References	227

B Quelques formules utiles **229**

Chapitre 1

Synthèse des travaux

1.1 Introduction générale

L'optimisation de forme consiste à rechercher la géométrie d'un objet qui soit optimale vis à vis de certains critères. C'est un sujet en plein développement car les applications industrielles sont nombreuses et les outils informatiques actuels permettent l'étude de configurations de plus en plus complexes.

De manière assez générale, les problèmes d'optimisation de forme rencontrés dans les sciences de l'ingénieur peuvent être modélisés de la façon suivante :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{E}} J(\Omega, u_\Omega) \quad (1.1)$$

où \mathcal{E} est un ensemble de domaines admissibles et u_Ω est la solution d'une certaine EDP posée dans Ω . Nous notons $\mathcal{J}(\Omega) = J(\Omega, u_\Omega)$. En dehors des méthodes stochastiques, comme les algorithmes génétiques [15], qui restent d'un coût de calculs élevé, les techniques usuelles d'optimisation requièrent le calcul des dérivées du critère par rapport aux variables de contrôle. La difficulté première de l'optimisation de forme réside donc dans le choix de l'ensemble \mathcal{E} ainsi que d'une paramétrisation de ses éléments qui lui confère la structure d'espace vectoriel normé. Accessoirement, pour des raisons plus théoriques que pratiques, l'existence d'un optimum global du problème (1.1) est souhaitée. Différentes possibilités ont été étudiées.

- En optimisation de forme classique [12, 4], \mathcal{E} est un ensemble de domaines lipéomorphes à un domaine de référence :

$$\mathcal{E} = \{F(\Omega_0), F \in W^{1,\infty}(\overline{B}), F^{-1} \in W^{1,\infty}(F(\overline{B}))\},$$

où B est une boule contenant $\overline{\Omega_0}$. C'est l'application F qui est utilisée comme paramétrisation. On peut montrer que, dans ces conditions, une variation infinitésimale de forme se traduit uniquement par un petit déplacement de la frontière du domaine. Dans ce cadre, la topologie ne peut pas changer. Par exemple, si Ω_0 est simplement connexe, alors tous les domaines Ω obtenus par itérations successives seront simplement connexes. C'est le principal défaut de la méthode, car dans beaucoup d'applications, les "bonnes" géométries contiennent un certain nombre de "perforations", nombre qui n'est pas connu a priori.

- La méthode des *level-sets*, introduite en optimisation de forme par G. Allaire, F. Jouve et A.M. Toader [2], consiste elle-aussi à déformer la frontière du domaine. La paramétrisation est faite ici à l’aide d’une fonction φ :

$$\Omega = \{x \in \Omega_0, \varphi(x) > 0\}.$$

En plus du fait qu’elle fonctionne sur maillage fixe, cette méthode a l’avantage de tolérer les changements de topologie dans un sens, à savoir celui de fermer des trous (la création de nouveaux trous semble moins évidente).

- Une autre solution consiste à rechercher Ω non plus en tant que domaine géométrique mais en tant que matériau possédant localement une certaine propriété physique qui servira de paramètre. Deux problèmes se posent : l’EDP doit être étendue à ces nouveaux domaines et l’objet obtenu a toutes les chances d’être en dehors de la classe de domaines qui intéresse le concepteur. Le premier, qui consiste en une relaxation, a été résolu de différentes façons. Par exemple, la théorie de l’homogénéisation, développée notamment par F. Murat, L. Tartar [13] et G. Allaire [1] s’appuie sur la notion de “mélange” entre matière et vide : elle en donne une définition rigoureuse et généralise l’EDP à de tels matériaux en faisant intervenir un paramètre matriciel $A(x)$. Cette classe assure en général l’existence d’une solution optimale. Le deuxième point est traité classiquement par une technique de pénalisation. Malheureusement, l’homogénéisation ne s’applique pour l’instant qu’à une catégorie restreinte de problèmes. En particulier en élasticité linéaire, il est difficile de traiter des fonctions coût autres que la compliance.
- La méthode du gradient topologique consiste à rechercher Ω parmi l’ensemble des domaines obtenus par création de trous dans un domaine initial Ω_0 . Nous aurons pour des trous circulaires par exemple :

$$\mathcal{E} = \left\{ \Omega_0 \setminus \bigcup_{i=1}^N \overline{B(x_i, \rho_i)}, \rho_i \geq 0 \right\}.$$

Généralement, la fonction coût n’est pas dérivable par rapport au paramètre $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)$ en $\rho = 0$ mais admet un développement asymptotique, ce qui fournit tout de même une direction de descente. En effet, si $(x_i)_{i=1, \dots, N}$ est l’ensemble des centres des éléments d’un maillage de Ω_0 , l’étude du signe de la variation $\mathcal{J}(\Omega_0 \setminus \overline{B(x_i, \rho_i)}) - \mathcal{J}(\Omega_0)$ lorsque ρ_i est petit renseigne sur l’opportunité d’enlever du domaine l’élément de centre x_i . Une recherche plus ou moins automatique de pas permet alors d’éliminer d’un seul coup tout un ensemble d’éléments. Ainsi, d’itération en itération, le domaine initial est évidé jusqu’à ce que l’objectif soit atteint.

Cette dernière méthode, sur laquelle nous nous concentrons maintenant, nécessite donc de connaître un développement asymptotique de la variation $\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{B(x, \rho)}) - \mathcal{J}(\Omega)$ lorsque ρ tend vers 0. Les premiers travaux sur ce sujet sont dus à A.M. Il’in [8], V. Maz’ya, S. Nazarov et B. Plamenevskij [11]. Ils ont obtenus des développements asymptotiques à un ordre quelconque de la variation de la solution et de certaines fonctions coût (énergie, première valeur propre) pour divers problèmes de la physique et un grand nombre de perturbations de domaine. A. Schumacher [16] eut le premier

l'idée d'utiliser ce genre de développements en optimisation de forme : en élasticité linéaire, il a déterminé la variation à l'ordre 1 de la compliance par rapport à la taille d'un trou inséré à l'intérieur du domaine, ce qui le renseignait sur le meilleur endroit où alléger la structure. Puis, toujours en élasticité, J. Sokolowski et A. Zochowski [17] ont étendu ce résultat à une certaine catégorie de fonctions coût. Ensuite, en utilisant une technique de troncature de domaine et une généralisation de la méthode adjointe, M. Masmoudi [10] a obtenu "l'asymptotique topologique" pour une large classe de fonctions coût dans le contexte de l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet au bord d'un trou circulaire. Cette méthodologie a ensuite été adaptée à l'étude de trous de forme quelconque avec condition de Dirichlet ou de Neumann : les formules correspondantes ont été déterminées par S. Garreau, Ph. Guillaume, M. Masmoudi et K. Sid Idris pour les équations de l'élasticité linéaire [3], de Poisson [5] et de Stokes [6]. Elles s'écrivent sous la forme générale

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{x + \rho\omega}) - \mathcal{J}(\Omega) = f(\rho)g(x) + o(f(\rho)),$$

où ω est un trou de taille unitaire et $f(\rho)$ est une fonction positive qui tend vers 0 avec ρ (voir Tableau 1.1). Sur le plan numérique, plusieurs tests ont prouvé l'efficacité de

	2D	3D
Dirichlet	$\frac{-1}{\ln \rho}$	ρ
Neumann	ρ^2	ρ^3

TAB. 1.1 – Valeur de $f(\rho)$

la méthode, notamment en élasticité et en électromagnétisme [9, 14]. Ils ont montré que la simple observation du gradient topologique g fournissait une assez bonne idée de la forme à obtenir, tandis que la pratique d'itérations utilisant g comme direction de descente était plus précise mais au prix d'un coût de calculs évidemment beaucoup plus élevé.

Cette thèse se propose de compléter l'étude de l'asymptotique topologique aussi bien sur les aspects théoriques que numériques. Les thèmes suivants sont abordés : la création de fissures, les opérateurs non homogènes, l'insertion d'objets diélectriques, les problèmes non linéaires et les algorithmes itératifs. Après la synthèse effectuée ci-dessous, le document est composé de huit chapitres. Les sept premiers sont constitués d'articles soumis ou acceptés et peuvent être lus indépendamment les uns des autres. Le dernier utilise des résultats établis dans le chapitre 4. Les lignes qui suivent présentent les différentes méthodes utilisées ainsi que les principaux résultats obtenus. Les aspects théoriques et numériques sont étudiés successivement.

1.2 Présentation d'un problème modèle et notations

Nous présentons ici un problème modèle qui servira de référence pour comparer différentes méthodes.

1.2.1 Le problème initial

Soit Ω un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^N , $N = 2$ ou 3 , de frontière Γ régulière. Considérons une application Φ définie et continue de $H^1(\mathcal{O})$ dans $H^1(\mathcal{O})'$ pour tout ouvert borné \mathcal{O} de \mathbb{R}^N . Etant donné $\sigma \in L^2(\Omega)$, on suppose qu'il existe un champ $u_0 \in (H^1 \cap H_{loc}^2)(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \Phi(u_0) = \sigma & \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2.2 Le problème perturbé

Soit ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N contenant l'origine et $x_0 \in \Omega$. Pour tout paramètre positif ρ suffisamment petit, nous définissons la cavité $\omega_\rho = x_0 + \rho\omega$ et le domaine perforé $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$. Un changement de coordonnées nous permet d'imposer pour l'étude théorique $x_0 = 0$. Nous nous intéressons à un champ $u_\rho \in H^1(\Omega_\rho)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_\rho + \Phi(u_\rho) = \sigma & \text{dans } \Omega_\rho, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \text{ou } u_\rho = 0 (D) & \text{sur } \partial\omega_\rho, \\ \partial_n u_\rho = 0 (N) & \end{cases} \quad (1.3)$$

On suppose que u_ρ est H^2 au voisinage de ω_ρ .

1.2.3 La fonction coût

Pour chaque $\rho \geq 0$, on considère une application J_ρ différentiable de $H_0^1(\Omega_\rho)$ dans \mathbb{R} et on pose

$$j(\rho) = J_\rho(u_\rho).$$

Nous recherchons le comportement asymptotique de la différence $j(\rho) - j(0)$ lorsque ρ tend vers zéro.

1.2.4 Formulation variationnelle

Nous définissons les espaces

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\rho &= \{u \in H^1(\Omega_\rho), u|_\Gamma = 0\}, \\ \mathcal{V}_\rho^0 &= \{u \in \mathcal{V}_\rho, u|_{\partial\omega_\rho} = 0\}. \end{aligned}$$

Sachant que la dimension est supérieure ou égale à 2, on a $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_0^0 = H_0^1(\Omega)$. La formulation variationnelle du problème perturbé de Dirichlet (resp. de Neumann) s'écrit : trouver $u_\rho \in \mathcal{V}_\rho^0$ (resp. \mathcal{V}_ρ) tel que

$$a_\rho(u_\rho, v) = l_\rho(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho^0 \text{ (resp. } \mathcal{V}_\rho),$$

avec

$$\begin{aligned} a_\rho(u, v) &= \int_{\Omega_\rho} [\nabla u \cdot \nabla v + \Phi(u)v] dx, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_\rho, \\ l_\rho(v) &= \int_{\Omega_\rho} \sigma v dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Remarque 1.1 *La condition aux limites sur Γ est sans influence sur la sensibilité topologique. Elle pourrait être remplacée par n'importe quelle condition telle que les problèmes (1.2) et (1.3) soient bien posés. Pour une condition de Dirichlet non homogène, par exemple, on se ramène aux formulations (1.2) et (1.3) par une technique de relèvement.*

1.3 Utilisation d'une méthode adjointe : différentes possibilités

Etant donné que le critère considéré est scalaire et qu'il y a en général un grand nombre de variables (autant que de noeuds ou d'éléments du maillage pour le problème discrétisé), l'utilisation d'une méthode adjointe paraît appropriée. Cependant, dans la plupart des cas, le comportement de la fonction j n'est pas proportionnel à ρ (voir Tableau 1.1). La méthode adjointe habituellement connue pour le calcul d'une dérivée doit donc être généralisée à un calcul de développement asymptotique. C'est l'objet de ce qui suit. De plus, des difficultés spécifiques à l'optimisation de topologie apparaissent. Nous supposons pour l'instant que le problème est linéaire (*i.e.* Φ est linéaire).

1.3.1 La méthode adjointe généralisée et la troncature de domaine

Nous rappelons que cette méthode a été introduite par M. Masmoudi dans [10]. Nous la généralisons dans le chapitre 3 au cas un peu plus compliqué d'un champ complexe et d'un problème non coercif.

La méthode adjointe généralisée

Soit \mathcal{V} un espace de Hilbert fixe. Pour tout $\rho \geq 0$, on considère une forme bilinéaire a_ρ uniformément continue et coercive sur \mathcal{V} et une forme linéaire l_ρ uniformément continue sur \mathcal{V} : il existe des constantes $\alpha > 0$, $M > 0$ et $L > 0$ indépendantes de ρ telles que pour tout $\rho > 0$,

$$\begin{aligned} a_\rho(u, v) &\leq M\|u\|\|v\|, & \forall u, v \in \mathcal{V}_R, \\ a_\rho(u, u) &\geq \alpha\|u\|^2, & \forall u \in \mathcal{V}_R, \\ l_\rho(v) &\leq L\|v\|, & \forall v \in \mathcal{V}_R. \end{aligned}$$

Soit u_ρ la solution du problème : trouver $u_\rho \in \mathcal{V}$ tel que

$$a_\rho(u_\rho, v) = l_\rho(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

On considère une famille de fonctions J_ρ définies sur \mathcal{V} telles que J_0 soit différentiable et on pose $j(\rho) = J_\rho(u_\rho)$.

Hypothèse 1.2 *On suppose qu'il existe sur \mathcal{V} une forme bilinéaire continue δ_a , une forme linéaire continue δ_l et une fonction δ_J ainsi qu'une fonction $f(\rho)$ définie sur \mathbb{R}^+*

telles que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) &= 0, \\ \|a_\rho - a_0 - f(\rho)\delta_a\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{V})} &= o(f(\rho)), \\ \|l_\rho - l_0 - f(\rho)\delta_l\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} &= o(f(\rho)), \\ J_\rho(v) - J_0(u) &= DJ_0(u)(v - u) + f(\rho)\delta_J(u) + o(\|v - u\| + f(\rho)), \end{aligned} \quad (1.5)$$

où $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{L}_2(\mathcal{V})$ désignent respectivement les espaces des formes linéaires et bilinéaires continues sur \mathcal{V} .

Le lagrangien est défini par

$$\mathcal{L}_\rho(u, v) = J_\rho(u) + a_\rho(u, v) - l_\rho(v).$$

En écrivant que la variation de la fonction coût $J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0)$ est égale à la variation du lagrangien $\mathcal{L}_\rho(u_\rho, v) - \mathcal{L}_0(u_0, v)$, on obtient le résultat suivant (voir [10] ou [3] pour la démonstration).

Théorème 1.1 *On a*

$$j(\rho) - j(0) = f(\rho)\delta_{\mathcal{L}}(u_0, v_0) + o(f(\rho)),$$

où

$$\delta_{\mathcal{L}}(u, v) = \delta_J(u) + \delta_a(u, v) - \delta_l(v)$$

et v_0 est la solution du problème adjoint : trouver $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que

$$a_0(w, v_0) = -DJ_0(u_0)w, \quad \forall w \in \mathcal{V}.$$

La troncature de domaine

Revenons au problème modèle avec, nous le rappelons, une application Φ linéaire. Le problème perturbé est posé sur un espace fonctionnel qui dépend de ρ : la méthode adjointe généralisée ne peut pas être appliquée directement. La technique de troncature fournit une formulation équivalente posée dans le domaine fixe

$$D_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}, \quad R > 0.$$

On pose

$$\Gamma_R = \partial B(0, R).$$

Soit T_ρ l'opérateur pseudo-différentiel "Dirichlet-to-Neumann"

$$T_\rho : \begin{array}{ccc} H^{1/2}(\Gamma_R) & \rightarrow & H^{-1/2}(\Gamma_R) \\ \varphi & \mapsto & \partial_n u_\rho^\varphi \end{array}$$

où u_ρ^φ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\rho^\varphi + \Phi(u_\rho^\varphi) = 0 & \text{dans } B(0, R) \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ u_\rho^\varphi = \varphi & \text{sur } \Gamma_R, \\ \text{ou } u_\rho^\varphi = 0 \text{ (D)} & \text{sur } \partial\omega_\rho, \\ \partial_n u_\rho^\varphi = 0 \text{ (N)} & \end{array} \right. \quad (1.6)$$

On suppose que les hypothèses nécessaires sur la fonction Φ pour que les problèmes (1.3) et (1.6) soient uniformément coercifs par rapport à ρ sont vérifiées. On suppose également que le support de σ est inclus dans D_R . On définit l'espace \mathcal{V} , la forme bilinéaire a_ρ et la forme linéaire l_ρ par

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{u \in H^1(D_R), u|_\Gamma = 0\}, \\ a_\rho(u, v) &= \int_{D_R} [\nabla u \cdot \nabla v + \Phi(u)v] dx + \int_{\Gamma_R} T_\rho uv ds, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_R, \\ l_\rho(v) &= \int_{D_R} \sigma v dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}_R. \end{aligned}$$

Ces définitions sont locales à cette sous-section et ne sont pas à confondre avec (1.4). Soit $u_\rho \in \mathcal{V}$ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_\rho + \Phi(u_\rho) = f & \text{dans } D_R, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n u_\rho = T_\rho u_\rho & \text{sur } \Gamma_R, \end{cases} \quad (1.7)$$

c'est-à-dire

$$a_\rho(u_\rho, v) = l_\rho(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Cet abus de notation sur la solution u_ρ est justifié par la proposition suivante.

Proposition 1.2 *La forme bilinéaire a_ρ est uniformément coercive par rapport à ρ . De plus, u_ρ est la restriction à D_R de la solution du problème (1.3).*

Pour tout $u \in \mathcal{V}$, nous définissons

$$J_\rho^R(u) = J_\rho(\tilde{u}),$$

où

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } D_R, \\ u_\rho^u & \text{dans } B(0, R) \setminus \overline{\omega_\rho}. \end{cases}$$

Si l'hypothèse 1.2 est vérifiée pour a_ρ , l_ρ et J_ρ^R , alors la variation de la fonction coût $j(\rho) = J_\rho^R(u_\rho)$ est donnée par le théorème 1.1. En dehors de la détermination de δ_J , qui dépend du critère considéré, l'étude est ainsi ramenée au calcul asymptotique de la variation

$$(a_\rho - a_0)(u, v) = \int_{\Gamma_R} (T_\rho - T_0) uv ds.$$

Remarque 1.3 *On montre que l'état adjoint v_0 du théorème 1.1 est la restriction à D_R de la solution du problème indépendant de R : trouver $v_0 \in \mathcal{V}_0$ tel que*

$$a_0(w, v_0) = -DJ_0(u_0)w, \quad \forall w \in \mathcal{V}_0,$$

où, cette fois-ci, a_0 est la forme bilinéaire définie par (1.4).

1.3.2 Une méthode adjointe pour les problèmes de Neumann

C'est la méthode qui est décrite et utilisée dans le chapitre 4 pour un champ complexe. Nous la présentons également sous une forme simplifiée dans le chapitre 2 dans le cas particulier des fissures qui ont l'avantage d'être "invisibles" dans L^2 .

Cadre abstrait

La méthode est fondée sur le fait que l'espace \mathcal{V}_ρ qui contient la solution du problème de Neumann (N) vérifie la propriété suivante : la restriction d'une fonction $u \in \mathcal{V}_0$ à Ω_ρ appartient à \mathcal{V}_ρ . Cela permet d'injecter \mathcal{V}_0 dans \mathcal{V}_ρ , ce qui est noté habituellement

$$\mathcal{V}_0 \hookrightarrow \mathcal{V}_\rho.$$

Pour ne pas alourdir l'écriture, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous ne noterons pas les restrictions. Pour tout $\rho > 0$, nous supposons qu'il existe sur \mathcal{V}_ρ une forme bilinéaire continue \tilde{a}_ρ et une forme linéaire continue \tilde{l}_ρ telles que

$$\tilde{a}_\rho(u_0, v) = \tilde{l}_\rho(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho. \quad (1.8)$$

Nous supposons qu'il existe un état adjoint variable solution de : trouver $v_\rho \in \mathcal{V}_\rho$ tel que

$$a_\rho(w, v_\rho) = -DJ_\rho(u_0)w \quad \forall w \in \mathcal{V}_\rho.$$

Hypothèse 1.4 *On suppose qu'il existe des réels δ_a , δ_l et δ_J et une fonction $f(\rho)$ définie sur \mathbb{R}^+ tels que*

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) &= 0, \\ (a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) &= f(\rho)\delta_a + o(f(\rho)), \\ (l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) &= f(\rho)\delta_l + o(f(\rho)), \end{aligned}$$

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = DJ_\rho(u_0)(u_\rho - u_0) + f(\rho)\delta_J + o(f(\rho)). \quad (1.9)$$

Le théorème suivant est démontré dans le chapitre 4 dans le cas plus général d'un champ complexe.

Théorème 1.3 *Nous avons*

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = f(\rho)(\delta_J + \delta_a - \delta_l) + o(f(\rho)).$$

Remarque 1.5 *L'hypothèse 1.4 peut paraître plus difficile à vérifier que l'hypothèse 1.2 dans la mesure où elle met en jeu la solution d'une EDP dépendant du paramètre ρ . Il faut cependant garder à l'esprit qu'avec la méthode de troncature, la forme bilinéaire a_ρ fait elle aussi intervenir la solution d'une EDP par l'intermédiaire de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann T_ρ .*

Application à l'optimisation topologique

Il s'agit de définir les applications \tilde{a}_ρ et \tilde{l}_ρ telles que l'équation (1.8) soit satisfaite. On suppose ici que le support du terme source σ ne contient pas l'origine, c'est à dire que, lorsque ρ est suffisamment petit, σ est nul dans un voisinage de ω_ρ . On montre alors (résultat classique en théorie des EDP) que l'on peut poser

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\rho(u, v) &= a_0(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_\rho, \\ \tilde{l}_\rho(v) &= l_0(\tilde{v}) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega_\rho, \\ h_\rho^u & \text{dans } \omega_\rho, \end{cases}$$

de même pour \tilde{v} , et h_ρ^φ est solution de

$$\begin{cases} -\Delta h_\rho^\varphi + \Phi(h_\rho^\varphi) = 0 & \text{dans } \omega_\rho, \\ h_\rho^\varphi = \varphi & \text{sur } \partial\omega_\rho. \end{cases} \quad (1.10)$$

Ces définitions entraînent automatiquement $\delta_l = 0$ puisque, lorsque ρ est suffisamment petit pour que $\text{Supp}(\sigma) \cap \omega_\rho = \emptyset$, $\tilde{l}_\rho = l_\rho$. Nous sommes ainsi ramenés à l'étude asymptotique de la quantité

$$(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) = - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_0 v_\rho ds.$$

Remarque 1.6 *Nous pouvons aussi poser tout simplement*

$$\begin{aligned} \tilde{a}_\rho(u, v) &= a_\rho(u, v) \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_\rho, \\ \tilde{l}_\rho(v) &= a_\rho(u_0, v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Nous avons dans ce cas $\delta_a = 0$. Grâce à la formule de Green, nous nous ramenons à l'étude de la variation

$$(l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) = \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_0 v_\rho ds, \quad (1.12)$$

ce qui est parfaitement identique au cas précédent. Cette formulation a l'avantage d'être également adaptée à l'étude d'une fissure σ_ρ (dans ce cas, les fonctions h_ρ^φ ne sont pas définies). Nous avons alors

$$(l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) = \int_{\sigma_\rho} \partial_n u_0 [v_\rho] ds, \quad (1.13)$$

où $[v_\rho]$ désigne le saut de v_ρ à travers la fissure.

1.3.3 Une méthode adjointe pour les problèmes de Dirichlet

Nous utilisons cette méthode dans les chapitres 6 et 7 sous une forme plus générale adaptée aux problèmes non linéaires.

Cadre abstrait

Contrairement au cas d'une condition de Neumann, nous utilisons l'injection suivante qui est fournie par le prolongement par 0 à l'intérieur de la cavité :

$$\mathcal{V}_\rho \hookrightarrow \mathcal{V}_0.$$

Pour simplifier l'écriture, le prolongement d'une fonction u par 0 sera noté aussi u . Pour tout $\rho \geq 0$, nous supposons qu'il existe sur \mathcal{V}_0 une forme bilinéaire continue \tilde{a}_ρ et une forme linéaire continue \tilde{l}_ρ telles que

$$\tilde{a}_\rho(u_\rho, v) = \tilde{l}_\rho(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_0. \quad (1.14)$$

Naturellement, on suppose que $\tilde{a}_0 = a_0$ et $\tilde{l}_0 = l_0$. Nous définissons l'état adjoint usuel, solution de : trouver $v_0 \in \mathcal{V}_0$ tel que

$$a_0(w, v_0) = -DJ_0(u_0)w \quad \forall w \in \mathcal{V}_0.$$

Hypothèse 1.7 *On suppose qu'il existe des réels δ_a , δ_l et δ_J et une fonction $f(\rho)$ définie sur \mathbb{R}^+ tels que*

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) &= 0, \\ (\tilde{a}_\rho - a_0)(u_\rho, v_0) &= f(\rho)\delta_a + o(f(\rho)), \\ (\tilde{l}_\rho - l_0)(v_0) &= f(\rho)\delta_l + o(f(\rho)), \end{aligned}$$

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) + f(\rho)\delta_J + o(f(\rho)). \quad (1.15)$$

Nous remarquons que la condition sur la fonction coût fait intervenir ici DJ_0 alors que dans le cas Neumann (1.9) elle faisait intervenir DJ_ρ . Cela provient du fait que la variation $u_\rho - u_0$ appartient à l'espace \mathcal{V}_0 (en prolongeant u_ρ par 0) pour une condition de Dirichlet, tandis qu'elle appartient à \mathcal{V}_ρ (par restriction) pour une condition de Neumann. Les δ_J sont de toutes façons différents dans les deux cas. Le théorème suivant est démontré dans le chapitre 6 dans le cas plus général d'un problème non linéaire. Pour s'y ramener, il suffit de poser pour tout $\rho \geq 0$ et tous $u, v \in \mathcal{V}_0$

$$\langle F_\rho(u), v \rangle = \tilde{a}_\rho(u, v) - \tilde{l}_\rho(v).$$

Théorème 1.4 *Dans ces conditions,*

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = f(\rho)(\delta_J + \delta_a - \delta_l) + o(f(\rho)).$$

Application à l'optimisation topologique

La manipulation suivante est une simple application de la formule de Green. Nous avons pour toute fonction test $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_\rho \cdot \nabla v dx &= \int_{\Omega_\rho} \nabla u_\rho \cdot \nabla v dx \\ &= - \int_{\Omega_\rho} \Delta u_\rho v dx - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v ds \\ &= \int_{\Omega_\rho} \sigma v dx - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v ds \\ &= \int_{\Omega} \sigma v dx - \int_{\omega_\rho} \sigma v dx - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v ds, \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$a_0(u_\rho, v) = l_0(v) - \int_{\omega_\rho} \sigma v dx - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v ds.$$

Nous posons

$$\begin{aligned}\tilde{a}_\rho(u, v) &= a_0(u, v) \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \\ \tilde{l}_\rho(v) &= l_0(v) - \int_{\omega_\rho} \sigma v dx - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v ds \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\end{aligned}$$

et nous avons, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\tilde{a}_\rho(u_\rho, v) = \tilde{l}_\rho(v).$$

L'équation (1.14) est satisfaite.

Pour appliquer le théorème 1.4 avec $\mathcal{V}_\rho = H_0^1(\Omega_\rho)$, il reste à déterminer $f(\rho)$, δ_a , δ_l et δ_J . Comme par construction $\tilde{a}_\rho = a_0$, nous avons automatiquement $\delta_a = 0$. Le terme δ_J dépend de la fonction coût considérée. Le calcul de $f(\rho)$ et de δ_l s'effectuera à partir de l'égalité suivante :

$$(\tilde{l}_\rho - l_0)(v_0) = - \int_{\omega_\rho} \sigma v_0 dx - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v_0 ds. \quad (1.16)$$

Il est intéressant de remarquer la correspondance des équations (1.12) et (1.16).

1.3.4 Comparaisons des approches avec et sans troncature

Nous avons présenté deux approches pour aborder les mêmes problèmes : une approche utilisant une technique de troncature et une approche directe déclinée en une version ‘‘Neumann’’ et une version ‘‘Dirichlet’’. Sachant que l'état adjoint est toujours défini de la même manière, ces deux méthodes sont sensées aboutir au même résultat.

La première a l'avantage de s'écrire de la même façon pour les deux types de condition aux limites. Ainsi, elle pourrait être utilisée pour une condition mixte. Un autre intérêt est qu'elle montre que la sensibilité topologique est une caractéristique locale (elle ne dépend que de l'EDP à l'intérieur du disque de troncature, celui-ci pouvant être choisi arbitrairement petit).

L'inconvénient principal de la méthode de troncature est qu'elle fait intervenir un paramètre artificiel R qui subsiste dans l'expression générale de la sensibilité topologique. Il faut alors considérer une fonction coût particulière pour le faire disparaître. Plus précisément, la dépendance en R du terme $\delta_a(u_0, v_0) - \delta_l(v_0)$ est compensée par celle de $\delta_J(u_0)$. De plus, l'étude de fonctions réparties est assez compliquée : il faut introduire une fonction coût auxiliaire J_ρ^R et étudier son comportement (voir par exemple [5]). Une autre difficulté technique surviendrait lors de l'étude de problèmes non linéaires pour la construction de l'opérateur ‘‘Dirichlet-to-Neumann’’ : il s'agirait d'un opérateur pseudo-différentiel non linéaire qu'il faudrait estimer au sens d'une certaine norme...

1.4 Estimation de la solution

Selon la méthode adjointe employée, le calcul de l'asymptotique topologique nécessite d'évaluer le comportement de l'une des fonctions u_ρ^φ , v_ρ ou u_ρ lorsque ρ tend vers zéro. Nous présentons à nouveau deux approches.

1.4.1 Calcul explicite de la solution

C'est la méthode qui est introduite dans [10] et que nous utilisons dans le chapitre 3. Elle n'est guère utilisable que dans le cas d'un trou sphérique étudié à l'aide d'une troncature elle aussi sphérique. Le principe consiste à décomposer la fonction u_ρ^φ sur une base de solutions de l'EDP dans $B(0, R) \setminus \overline{\omega}_\rho$. Par exemple pour l'équation de Helmholtz 2D avec condition de Dirichlet, nous obtenons au chapitre 3 en coordonnées polaires :

$$u_\rho^\varphi(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(kr)Y_n(k\rho) - J_n(k\rho)Y_n(kr)}{J_n(kR)Y_n(k\rho) - Y_n(kR)J_n(k\rho)} \varphi_n e^{in\theta},$$

où φ_n sont les coefficients de Fourier de φ sur Γ_R et J_n, Y_n sont les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce. Nous en déduisons une approximation à l'ordre 1 de $T_\rho - T_0$ (dans $\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$) puis de $a_\rho - a_0$ (dans $\mathcal{L}_2(D_R)$).

1.4.2 Approximation par la solution d'une équation intégrale

Cas d'un opérateur homogène

Cette technique a été introduite dans [3] dans le contexte de l'élasticité linéaire avec troncature. Ici, nous en présentons une adaptation compatible avec l'utilisation des méthodes adjointes des sections 1.3.2 et 1.3.3.

1. **Cas d'une condition de Neumann.** Considérons le problème modèle de Neumann en 3D avec $\Phi = 0$. Nous avons besoin d'estimer l'adjoint variable v_ρ . Toutes les approximations effectuées ci-dessous sont justifiées dans le chapitre 4 dans le contexte plus général de l'équation de Helmholtz. Il s'agit du cas 2D, mais le changement de dimension n'entraîne que des modifications formelles. Nous supposons ici pour simplifier que la fonction coût ne dépend pas de la valeur du champ au voisinage de l'endroit où l'on crée le trou. Nous définissons le champ

$$w_\rho = v_\rho - v_0$$

qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta w_\rho = 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ w_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_n w_\rho = -\partial_n v_0 & \text{sur } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

L'idée est d'approcher $w_\rho(x)$ par $p_\rho(x) = \rho P_\rho(x/\rho)$ où P_ρ est la solution du problème extérieur

$$\begin{cases} -\Delta P_\rho = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ P_\rho = 0 & \text{à } l'\infty, \\ \partial_n P_\rho = -\partial_n v_0(\rho x) & \text{sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (1.17)$$

Schématiquement, l'approximation de w_ρ par P_ρ se justifie par le fait que la fonction $w_\rho(\rho x)$ vaut zéro sur Γ/ρ , frontière qui, lorsque ρ tend vers zéro, "s'éloigne vers l'infini". Cette fonction P_ρ s'exprime à l'aide d'un potentiel de simple couche :

$$P_\rho(x) = \int_{\partial\omega} E(x-y)\eta_\rho(y)ds(y)$$

où la densité $\eta_\rho \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ est solution de

$$\frac{\eta_\rho(x)}{2} + \int_{\partial\omega} \partial_{n_x} E(x-y) \eta_\rho(y) ds(y) = -\partial_n v_0(\rho x) \quad \forall x \in \partial\omega \quad (1.18)$$

et E est la solution élémentaire du laplacien. D'après la formule de Green, nous avons

$$\begin{aligned} (a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) &= - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_0 v_\rho ds \\ &= - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n h_\rho^{v_\rho} u_0 ds \\ &= -\rho^2 \int_{\partial\omega} \partial_n h_\rho^{v_\rho}(\rho x) u_0(\rho x) ds \\ &= -\rho^2 \int_{\partial\omega} [\partial_n h_\rho^{w_\rho}(\rho x) + \partial_n v_0(\rho x)] u_0(\rho x) ds. \end{aligned}$$

On montre que

$$\int_{\partial\omega} \partial_n h_\rho^{w_\rho}(\rho x) u_0(\rho x) ds = \int_{\partial\omega} \partial_n h_\rho^{p_\rho}(\rho x) u_0(\rho x) ds + o(\rho).$$

Or, d'après la relation de saut,

$$\eta_\rho(x) = -\partial_n v_0(\rho x) - \partial_n h_\rho^{p_\rho}(\rho x).$$

D'où

$$(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) = \rho^2 \int_{\partial\omega} \eta_\rho(x) u_0(\rho x) ds + o(\rho^3).$$

Sachant que dans ce cas la densité η_ρ est à moyenne nulle sur $\partial\omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned} (a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) &= \rho^2 \int_{\partial\omega} \eta_\rho(x) [u_0(\rho x) - u_0(0)] ds + o(\rho^3) \\ &= \rho^2 \int_{\partial\omega} \eta_\rho(x) \nabla u_0(0) \cdot \rho x ds + o(\rho^3). \end{aligned}$$

Le caractère bien posé de l'équation intégrale permet de remplacer dans cette expression η_ρ par la densité η , indépendante de ρ , solution de

$$\frac{\eta(x)}{2} + \int_{\partial\omega} \partial_{n_x} E(x-y) \eta(y) ds(y) = -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} \quad \forall x \in \partial\omega. \quad (1.19)$$

Nous avons ainsi

$$(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) = \rho^3 \nabla u_0(0) \cdot \left(\int_{\partial\omega} \eta(x) x ds \right) + o(\rho^3),$$

ce qui permet de poser

$$f(\rho) = \rho^3 \quad \text{et} \quad \delta_a = \nabla u_0(0) \cdot \left(\int_{\partial\omega} \eta(x) x ds \right).$$

Lorsque $\omega = B(0, 1)$ (trou sphérique), nous obtenons après résolution de l'équation intégrale

$$\delta_a = -2\pi \nabla u_0(0) \cdot \nabla v_0(0).$$

2. **Cas d'une condition de Dirichlet.** Considérons maintenant le problème modèle de Dirichlet, toujours en 3D avec $\Phi = 0$, étudié à l'aide de la méthode adjointe de la section 1.3.3. Dans ce cas, il faut estimer la solution u_ρ . Nous renvoyons au chapitre 6 pour une justification rigoureuse, mais dans le contexte plus général d'une EDP non linéaire, de toutes les approximations effectuées ci-dessous. Le raisonnement est sensiblement différent du cas d'une condition de Neumann. Nous supposons que le terme source σ est continu au voisinage de l'origine. On introduit à nouveau la variation

$$w_\rho = u_\rho - u_0$$

qui est solution de

$$\begin{cases} -\Delta w_\rho = 0 & \text{dans } \Omega_\rho, \\ w_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ w_\rho = -u_0 & \text{sur } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

Nous allons approcher w_ρ par h_ρ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta h_\rho = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ h_\rho = 0 & \text{à } l'\infty, \\ h_\rho = -u_0(0) & \text{sur } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

Là encore, cette approximation est justifiée par le fait que la fonction $w_\rho(\rho x)$ vaut zéro sur la frontière Γ/ρ qui "tend vers l'infini" lorsque ρ tend vers zéro. Nous effectuons le changement de variable $h_\rho(x) = H(x/\rho)$. La fonction $H \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega})$, indépendante de ρ , est solution de

$$\begin{cases} -\Delta H = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ H = 0 & \text{à } l'\infty, \\ H = -u_0(0) & \text{sur } \partial\omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Nous exprimons H à l'aide d'un potentiel de simple couche :

$$H(x) = \int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y)$$

où la densité $\eta \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ est l'unique solution de l'équation intégrale

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y) = -u_0(0) \quad \forall x \in \partial\omega \quad (1.21)$$

et E est toujours la solution élémentaire du laplacien. D'après la relation de saut, nous avons

$$\rho \partial_n h_\rho(\rho x) = \partial_n H(x) = -\eta(x) \quad \forall x \in \partial\omega.$$

Ainsi, l'équation (1.16) s'écrit

$$(\tilde{l}_\rho - l_0)(v_0) = - \int_{\omega_\rho} \sigma v_0 dx - \rho^2 \int_{\partial\omega} \partial_n u_\rho(\rho x) v_0(\rho x) ds$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho^2 \int_{\partial\omega} \partial_n u_\rho(\rho x) v_0(\rho x) ds + \mathcal{E}_1(\rho) \\
&= -\rho^2 \int_{\partial\omega} \partial_n w_\rho(\rho x) v_0(\rho x) ds + \sum_{i=1}^2 \mathcal{E}_i(\rho) \\
&= -\rho^2 \int_{\partial\omega} \partial_n h_\rho(\rho x) v_0(\rho x) ds + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i(\rho) \\
&= \rho \int_{\partial\omega} \eta(x) v_0(\rho x) ds + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i(\rho) \\
&= \rho \left(\int_{\partial\omega} \eta ds \right) v_0(0) + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho),
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(\rho) &= - \int_{\omega_\rho} \sigma v_0 dx, \\
\mathcal{E}_2(\rho) &= -\rho^2 \int_{\partial\omega} \partial_n u_0(\rho x) v_0(\rho x) ds, \\
\mathcal{E}_3(\rho) &= -\rho^2 \int_{\partial\omega} \partial_n (w_\rho - h_\rho)(\rho x) v_0(\rho x) ds, \\
\mathcal{E}_4(\rho) &= \rho \int_{\partial\omega} \eta(x) [v_0(\rho x) - v_0(0)] ds.
\end{aligned}$$

On montre que

$$|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho) \quad \forall i = 1, \dots, 4.$$

Nous posons par conséquent

$$f(\rho) = \rho \quad \text{et} \quad \delta_l = \left(\int_{\partial\omega} \eta ds \right) v_0(0).$$

Lorsque $\omega = B(0, 1)$, nous avons

$$-\delta_l = 4\pi u_0(0) v_0(0).$$

3. Remarques.

- (a) En 2D, avec une condition de Dirichlet, le potentiel de simple couche ne tend plus vers 0 à l'infini, ce qui rend l'approximation de w_ρ par h_ρ impossible. L'approche est très différente (voir chapitre 6). En revanche, avec une condition de Neumann, il tend toujours vers 0 car la densité est à moyenne nulle. Le raisonnement est alors parfaitement similaire.
- (b) Dans le cas d'une fissure avec condition de Neumann, on utilise un potentiel de double couche (voir chapitres 2 et 4).
- (c) Avec la méthode de troncature, on a besoin d'estimer la fonction u_ρ^φ au voisinage de Γ_R . Considérons par exemple le cas de Dirichlet en 3D. L'idée est toujours d'approcher la variation $u_\rho^\varphi - u_0^\varphi$ par $h_\rho(x) = H(x/\rho)$ où H

est solution d'une EDP du type (1.20). Mais, après changement de variable, Γ_R devient $\Gamma_{R/\rho}$ et il faut estimer $H(x)$ pour $|x|$ grand. La méthode se poursuit donc par l'extraction de la partie principale de H à l'infini, puis par l'évaluation de sa dérivée normale (voir [3, 5]). Sur cette dernière, un terme correctif est à prendre en compte du fait de n'avoir conservé qu'une partie de H . En résumé, le raisonnement est rendu plus compliqué à cause de l'impossibilité d'exprimer la dérivée normale du potentiel de simple couche au bord de la troncature directement en fonction de la densité comme on peut le faire au bord du trou grâce à la relation de saut.

Cas d'un opérateur non homogène

Lorsque l'opérateur est non homogène (avec Φ linéaire), on approche toujours la variation $u_\rho - u_0$ par la solution d'un problème de Laplace extérieur (système (1.20)). Avec une condition de Dirichlet, on montre que cette approximation est suffisante : la sensibilité topologique ne dépend que de la partie principale de l'opérateur. Avec une condition de Neumann, il faut prendre en compte des termes correctifs (voir chapitre 4).

Cas d'un opérateur non linéaire

Pour une perturbation Φ non linéaire, nous n'avons étudié que le cas d'une condition de Dirichlet (chapitre 6). Sous certaines hypothèses sur la fonction Φ , on montre là encore que l'approximation par la partie principale de l'opérateur est suffisante.

1.4.3 Conclusion : choix de la méthode

Le calcul explicite de la solution devient très compliqué dès que le trou n'est plus circulaire, que l'opérateur n'est plus le laplacien, ou que l'on est en dimension 3. Néanmoins, lorsque l'on connaît mal les propriétés de l'opérateur que l'on étudie, cette méthode peut être utilisée comme première approche. Elle a par exemple permis à J. Pommier [14] de déterminer la sensibilité topologique des équations de Maxwell sans se préoccuper des propriétés complexes des équations intégrales associées à cet opérateur. Sinon, l'autre approche est plus générale (trous de forme quelconque) et évite beaucoup de calculs.

1.5 Les principaux résultats

1.5.1 L'équation de Laplace

Quelques propriétés

Commençons par dire quelques mots de l'annexe.

L'**annexe A** rassemble un certain nombre de résultats relatifs à la résolution de problèmes extérieurs de Laplace en 2D. Ils sont utilisés à maintes reprises dans ce manuscrit, notamment dans les chapitres 2 et 4. Les définitions des différents espaces

fonctionnels sont précisées et les principaux théorèmes énoncés. Certaines démonstrations sont effectuées brièvement, car beaucoup de ces résultats figurent dans la littérature sous des formes et des hypothèses assez différentes. Notamment, le passage du 3D plus répandu au 2D apporte des changements notables et la formulation explicite de l'équation intégrale pour une fissure droite est donnée sous des conditions particulières.

L'**annexe B** regroupe quelques formules simples qui sont utilisées à de nombreuses occasions dans le document.

Insertion d'une fissure

Le **chapitre 2** est consacré à l'étude de la sensibilité topologique de l'équation de Laplace 2D par rapport à la création d'une fissure avec condition de Neumann. Dans un souci de clarté (il s'agit d'un article essentiellement numérique), la partie théorique est volontairement présentée dans un contexte simple : la méthode adjointe telle qu'elle est décrite prend en compte la spécificité des fissures et nous nous restreignons à la classe de fonctions coût suivante. Soit D un voisinage de l'origine et l'espace fonctionnel

$$\mathcal{W} = \{u \in L^2(\Omega), u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = (\|u\|_{0,D}^2 + \|u\|_{1,\Omega \setminus \overline{D}}^2)^{1/2}.$$

On considère une fonction coût J différentiable de \mathcal{W} dans \mathbb{R} . Alors, pour une fissure droite de normale \mathbf{n} et de longueur 2ρ , nous obtenons l'asymptotique topologique

$$J(u_\rho) - J(u_0) = -\pi\rho^2(\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n})(\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}) + o(\rho^2). \quad (1.22)$$

1.5.2 L'équation de Helmholtz

Condition de Dirichlet

Le **chapitre 3** s'intéresse à l'équation de Helmholtz 2D avec condition de Dirichlet. Chronologiquement, il s'agit du premier travail de cette thèse. Il a ainsi été effectué à l'aide de la méthode "classique" de troncature, pour une classe restreinte de fonctions coût. De plus, sachant la spécificité du cas de Dirichlet en 2D, nous avons opté pour un calcul explicite de la solution. Seul le trou circulaire est étudié. Des travaux ultérieurs ont d'ailleurs montré que le résultat était indépendant de la forme du trou (voir thèse de B. Samet et chapitre 6). Comme l'équation de Helmholtz est destinée à s'appliquer à des champs complexes, nous avons adapté la méthode adjointe à cette situation. Soit $J : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coût telle que $J(u)$ ne dépende pas de la valeur de u au voisinage de l'origine. Ici, $H^1(\Omega)$ est un ensemble de fonctions à valeur complexe, donc un espace vectoriel sur le corps des complexes. La fonction J qui est à valeurs réelles ne peut donc pas être différentiable. Nous remplaçons l'équation (1.5) de l'hypothèse 1.2 par la condition suivante : il existe pour tout $u \in H^1(\Omega)$ une forme linéaire L_u continue sur $H^1(\Omega)$ telle que

$$J(v) - J(u) = \Re L_u(v - u) + o(\|v - u\|).$$

Nous définissons l'état adjoint par

$$a_0(u, v_0) = -L_{u_0}(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Nous obtenons l'asymptotique topologique

$$J(u_\rho) - J(u_0) = \frac{-2\pi}{\ln \rho} \Re \left(u_0(0) \overline{v_0(0)} \right) + o \left(\frac{-1}{\ln \rho} \right). \quad (1.23)$$

Condition de Neumann

Le **chapitre 4** concerne toujours l'équation de Helmholtz 2D, avec cette fois-ci une condition de Neumann. Nous utilisons la méthode adjointe présentée à la section 1.3.2, en l'adaptant au cas complexe, avec une approximation de la solution par équation intégrale. Nous supposons que la fonction coût vérifie

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = \Re L_\rho(u_\rho - u_0) + \rho^2 \delta_J + o(\rho^2) \quad (1.24)$$

où L_ρ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega_\rho)$ et $\delta_J \in \mathbb{R}$. Nous définissons l'état adjoint variable par

$$a_\rho(u, v_\rho) = -L_\rho(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Nous nous intéressons à des trous et des fissures de formes quelconques. Nous obtenons respectivement pour un trou circulaire et une fissure droite :

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = \pi \rho^2 \Re \left(-2 \nabla u_0(0) \cdot \overline{\nabla v_0(0)} + k^2 u_0(0) \overline{v_0(0)} \right) + o(\rho^2), \quad (1.25)$$

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = -\pi \rho^2 \Re \left((\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}) \overline{(\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n})} \right) + o(\rho^2). \quad (1.26)$$

En prenant $k = 0$ avec un champ est réel, nous retrouvons le résultat établi dans [5] pour le trou circulaire et le résultat du chapitre 2 pour la fissure droite. Nous étudions deux fonctions coût particulières qui satisfont à l'équation (1.24). Elles sont rassemblées dans le tableau 1.2. Nous désignons par $V(0)$ un voisinage de l'origine et par u_d une fonction de $L^2(\Omega)$ continue au voisinage de l'origine.

Fonction coût	Trou	Fissure
$J_\rho(u) = J(u _{\Omega \setminus V(0)})$	$\delta_J = 0$	$\delta_J = 0$
$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} u - u_d ^2 dx$	$\delta_J = -\pi u_0(0) - u_d(0) ^2$	$\delta_J = 0$

TAB. 1.2 – Fonctions coût particulières (Neumann)

Insertion d'une inhomogénéité

Dans le **chapitre 5**, nous nous intéressons à l'insertion de petites inhomogénéités dans les coefficients de l'équation de Helmholtz. Plus précisément, on considère l'EDP

$$\operatorname{div} (\alpha_\rho \nabla u_\rho) + \beta_\rho u_\rho = 0$$

avec

$$\alpha_\rho(x) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ \alpha_1 & \text{si } x \in \omega_\rho, \end{cases} \quad \beta_\rho(x) = \begin{cases} \beta_0 & \text{si } x \in \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ \beta_1 & \text{si } x \in \omega_\rho, \end{cases}$$

les coefficients α_0 , α_1 , β_0 et β_1 étant des constantes réelles. Ici, comme les solutions appartiennent à un espace fonctionnel fixe, nous utilisons directement la méthode adjointe généralisée sans troncature. Pour l'estimation de la solution, nous nous inspirons de la méthode utilisée dans [18]. Nous obtenons par exemple pour un trou sphérique, en dimension N , avec une fonction coût vérifiant (1.24) avec ρ^N au lieu de ρ^2 ,

$$\begin{aligned} & J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) \\ &= \rho^N \Re \left\{ \frac{N\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_0)}{(N-1)\alpha_0 + \alpha_1} |\omega| \nabla u_0(0) \cdot \overline{\nabla v_0(0)} - (\beta_1 - \beta_0) |\omega| u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta_J \right\} + o(\rho^N). \end{aligned}$$

Nous étudions également quelques fonctions coût particulières dont le δ_J , pour un trou sphérique, est indiqué dans le tableau 1.3. En prenant $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = k^2$ et en faisant

Fonction coût	δ_J
$J_\rho(u) = J(u _{\Omega \setminus \overline{V(0)}})$	0
$J_\rho(u) = \int_{\Omega} \alpha_\rho u - u_d ^2 dx$	$(\alpha_1 - \alpha_0) \omega u_0(0) - u_d(0) ^2$
$J_\rho(u) = \int_{\Omega} \alpha_\rho \nabla(u - u_d) ^2 dx$	$(\alpha_1 - \alpha_0) \omega \nabla u_0(0) - \nabla u_d(0) ^2$ $-\frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{(N-1)\alpha_0 + \alpha_1} \omega \nabla u_0(0) ^2$

TAB. 1.3 – Fonctions coût particulières (inhomogénéité)

tendre α_1 et β_1 vers 0, on retrouve les formules du trou avec condition de Neumann. En considérant un trou elliptique dont le petit axe tend vers 0, on retrouve également la formule de la fissure.

1.5.3 Problèmes non linéaires

Cadre général

Dans le **chapitre 6**, nous abordons le problème modèle avec une condition de Dirichlet et une fonction Φ non linéaire. Nous considérons à nouveau un champ réel. Nous établissons des conditions suffisantes sur Φ pour que la sensibilité topologique reste celle du laplacien. Puis nous généralisons ce résultat au cas où le laplacien est remplacé par un opérateur elliptique de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathcal{O}) &\rightarrow \mathcal{V}_0(\mathcal{O})' \\ \tilde{\Delta} : \quad u &\mapsto \operatorname{div}(A\nabla u), \end{aligned}$$

où $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ est un sous espace fermé de $H^1(\mathcal{O})^n$, $\mathcal{V}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})^n$ et A est un tenseur d'ordre 4 vérifiant

$$AU : U \geq cU : U, \quad \forall U \in \mathcal{M}_{N,n}(\mathbb{R}).$$

Lorsque cet opérateur est isotrope (les coefficients de sa matrice élémentaire $E(x)$ projetée dans la base locale $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ ne dépendent que du rayon r) et que

$$\begin{cases} E(x) = O\left(\frac{1}{r}\right) & (r \rightarrow +\infty) \\ \int_{\partial\omega} E(x-y)ds(y) = mI & \forall x \in \partial\omega \\ E(x) \sim -q\frac{\ln r}{2\pi}I & (x \rightarrow 0) \end{cases} \begin{array}{l} \text{en 3D,} \\ \\ \text{en 2D,} \end{array}$$

où m et q sont des nombres réels et I est la matrice identité, nous obtenons pour une fonction coût vérifiant (1.15) les développements asymptotiques suivants

$$\begin{aligned} J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) &= \rho \left[\frac{4\pi}{m} u_0(0) \cdot v_0(0) + \delta_J \right] + o(\rho) && \text{en 3D,} \\ J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) &= \frac{-1}{\ln \rho} \left[\frac{2\pi}{q} u_0(0) \cdot v_0(0) + \delta_J \right] + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right) && \text{en 2D.} \end{aligned}$$

Ces formules sont valables pour un trou sphérique en 3D et un trou de forme quelconque en 2D. Nous étudions également les fonctions coût évoquées précédemment. Pour un trou sphérique, nous donnons le δ_J correspondant dans le tableau 1.4.

Dans le cas particulier d'une perturbation linéaire, nous retrouvons des formules connues (voir tableau 1.5¹) : équations de Laplace [5], de l'élasticité linéaire [3], de Helmholtz (chapitre 3), de Stokes [6] et de quasi-Stokes [7].

Fonction coût	δ_J
$J_\rho(u) = J(u _{\Omega \setminus \overline{V(0)}})$	0
$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} u - u_d ^2 dx$	0
$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} \nabla(u - u_d) ^2 dx$	$\frac{4\pi}{m} u_0(0) ^2$ en 3D $\frac{2\pi}{q} u_0(0) ^2$ en 2D

TAB. 1.4 – Fonctions coût particulières (Dirichlet)

Equations de Navier-Stokes

Dans le **chapitre 7**, nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. La condition au bord de l'obstacle est de type Dirichlet (condition d'adhérence). Toute la difficulté réside dans le fait de montrer que la non-linéarité en question vérifie les hypothèses du chapitre 6. Etant donné que ce travail a été effectué avant l'étude générale des systèmes non linéaires, la démarche est présentée dans son intégralité, mais dans un contexte de mécanique des fluides.

¹En élasticité 2D, la valeur de q indiquée est valable en déformation plane. En contrainte plane, λ doit être remplacé par $\lambda^* = 2\mu\lambda/(\lambda + 2\mu)$.

	m (3D)	q (2D)
Laplace, Helmholtz	1	1
Elasticité, ondes élastiques	$\frac{2\lambda + 5\mu}{3\mu(\lambda + 2\mu)}$	$\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}$
Stokes, quasi-Stokes	$\frac{2}{3\nu}$	$\frac{1}{2\nu}$

TAB. 1.5 – Coefficients m et q (Dirichlet)

1.6 Aspects numériques

1.6.1 Deux façons d'utiliser le gradient topologique

Le gradient topologique comme outil d'aide à la décision

Il s'agit de faire de l'optimisation "manuelle" de forme en se servant du gradient topologique comme d'un outil qui peut donner des idées ou aider à effectuer certains choix de conception. C'est une utilisation qui convient bien aux ingénieurs s'occupant de problèmes complexes car dans ce cas tout n'est pas pris en compte par le modèle mathématique et on ne peut pas se passer de l'intervention humaine. Elle a par exemple servi à la conception de guides d'onde chez Alcatel [9].

Le principe est très simple : il suffit de calculer le gradient topologique et de le représenter visuellement. Pour faire baisser le critère, on a normalement intérêt à enlever (ou ajouter selon les cas) de la matière là où il est le plus négatif.

Cette utilisation convient aussi très bien à certains problèmes d'inversion de forme qui s'intéressent plus à la présence et à la position de l'objet recherché qu'à sa forme précise.

Le gradient topologique comme outil d'optimisation automatique de forme

Le principe est d'utiliser un algorithme d'optimisation itératif dont la direction de descente est construite à partir du gradient topologique. C'est une utilisation purement expérimentale pour l'instant.

1.6.2 Présentation des principaux tests réalisés

Localisation de fissures

Dans le **chapitre 2**, nous cherchons à mettre en évidence l'aptitude du gradient topologique à la localisation de fissures. Nous sommes dans le contexte de l'équation de la chaleur avec un flux φ imposé sur le bord Γ d'un domaine circulaire et la température mesurée sur cette même frontière (ou sur une partie seulement). Les fissures inconnues sont supposées parfaitement isolantes (condition de Neumann). Pour les localiser, nous cherchons à minimiser la fonction coût

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u_D - u_N\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où u_D vérifie la condition de Dirichlet $u_D = T$ sur Γ et u_N vérifie la condition de Neumann $\partial_n u_N = \varphi$. Nous avons alors deux états adjoints v_D et v_N et le gradient topologique

$$\begin{aligned} g(x, \mathbf{n}) &= -[(\nabla u_D(x) \cdot \mathbf{n})(\nabla v_D(x) \cdot \mathbf{n}) + (\nabla u_N(x) \cdot \mathbf{n})(\nabla v_N(x) \cdot \mathbf{n})] \\ &= \mathbf{n}^T M(x) \mathbf{n} \end{aligned}$$

avec

$$M(x) = -\text{sym} (\nabla u_D(x) \otimes \nabla v_D(x) + \nabla u_N(x) \otimes \nabla v_N(x)),$$

où nous notons $\text{sym}(A) = (A + A^T)/2$ et $U \otimes V = UV^T$. Le gradient topologique au point x est minimal lorsque la normale \mathbf{n} est orientée suivant la direction propre associée à la plus petite valeur propre $\lambda_1(x)$ de $M(x)$.

Plusieurs tests sont présentés, incluant l'adjonction d'un bruit aléatoire et des mesures incomplètes. On montre que la simple observation des pics négatifs de la fonction λ_1 fournit une très bonne localisation des fissures. Une méthode itérative utilisant λ_1 comme direction de descente a été également mise en oeuvre.

Optimisation d'un guide d'onde

Dans le **chapitre 3**, nous présentons trois utilisations du gradient topologique pour l'optimisation d'un guide d'onde fonctionnant en plan H. La première est une méthode itérative, mais où le pas à chaque itération est choisi manuellement. La deuxième suit complètement l'approche du paragraphe 1.6.1 : nous choisissons une forme qui nous est suggérée par l'allure du gradient topologique. La troisième, itérative, consiste à ajouter à chaque étape un plot de matière isolé de la taille d'une maille. Dans les trois cas, nous obtenons des résultats satisfaisants.

Inversion de forme en électromagnétisme

Dans le **chapitre 4**, nous essayons d'identifier un objet métallique en l'illuminant d'ondes électromagnétiques. On suppose que l'on a P sources qui sont aussi des capteurs, chacune située sur la partie Γ_j du bord Γ . Nous avons donc P états directs u_1, \dots, u_P . Nous cherchons à minimiser la fonction coût

$$J(u_1, \dots, u_P) = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^P |S_j(u_i) - S_{ij}^m|^2.$$

où

$$S_j(u) = \int_{\Gamma_j} u ds$$

et $S_{ij}^m = S_j(u_i^m)$ est la mesure.

Nous utilisons, selon que l'objet recherché est épais ou mince, le gradient topologique pour un trou circulaire ou pour une fissure (orientée de façon optimale comme au paragraphe 1.6.2).

L'observation des minima du gradient topologique fournit une localisation correcte de l'objet. Le tracé d'une ligne de niveau adéquate permet d'avoir une bonne idée de

sa forme, mais la détermination d'un tel seuil n'est pas automatique, à moins d'utiliser une recherche linéaire coûteuse. La connaissance de la taille approximative de l'objet recherché permet de choisir manuellement ce seuil.

Optimisation d'une cuve de décantation

Dans le **chapitre 7**, nous voulons placer des obstacles à l'intérieur d'une cuve de décantation de manière à s'approcher d'un écoulement objectif. Cet exemple a été traité pour les équations de Stokes dans [6]. Le comportement du fluide est ici modélisé par les équations de Navier-Stokes. Comme on s'y attendait, on obtient de bons résultats à bas Reynolds. Mais dès que celui-ci dépasse la dizaine, on observe deux phénomènes qui perturbent fortement l'optimisation.

- L'amincissement de la couche limite au bord des obstacles nécessite d'utiliser un maillage prohibitif, à moins d'effectuer un raffinement local qui imposerait de remailler à chaque itération.
- Des tourbillons apparaissent à l'aval des obstacles, dès que ceux-ci atteignent un certain diamètre. Cette turbulence n'est pas prévue par le gradient topologique, car elle n'existe pas pour des obstacles infinitésimaux (nous rappelons que la couche limite reste laminaire en dessous d'une taille critique).

Essais comparatifs de différentes méthodes et élaboration d'algorithmes itératifs

Le **chapitre 8** complète l'étude numérique. Dans un premier temps, nous revenons sur les fissures en essayant d'exploiter au mieux leur anisotropie. L'exemple choisi, la construction d'une parabole, permet de faire tous les calculs à la main. Il montre que la meilleure orientation des fissures n'est pas forcément celle utilisée dans les chapitres 2 et 4. Nous proposons une alternative. Un comparatif des différentes méthodes est réalisé sur deux cas test : l'optimisation d'un guide d'onde et l'inversion de forme. Nous en profitons pour expérimenter, sur le problème d'inversion de forme, le gradient topologique relatif à l'insertion d'inhomogénéités diélectriques (obtenu au chapitre 5). Il s'agit de localiser un objet de caractéristiques diélectriques connues.

Ensuite, nous nous concentrons sur les algorithmes itératifs en adaptant à l'optimisation topologique des méthodes de type Krylov. Deux approches sont envisagées.

- La méthode "directe" prend comme direction de descente une combinaison linéaire des gradients topologiques calculés à l'itération en cours et aux itérations précédentes.
- La méthode "indirecte" cherche à minimiser J en considérant l'EDP comme une contrainte. L'idée est de tirer parti des bonnes propriétés de J vis à vis de l'optimisation itérative (J peut par exemple être quadratique convexe). Souvent, cela revient à effectuer la combinaison linéaire sur le second membre de l'état adjoint, ce qui est particulièrement simple à programmer.

Les deux approches sont comparées sur les deux exemples précédents.

1.6.3 Bilan

Les différents essais réalisés confirment logiquement que, pour des insertions de taille finie, l'asymptotique topologique est d'autant plus fiable que le problème est bien posé au sens de Hadamard (c'est-à-dire que la solution dépend régulièrement des données). Ainsi, les difficultés s'accroissent lorsque l'on passe de Laplace à Helmholtz, puis à Navier-Stokes. La sensibilité par rapport à la topologie serait dans tous les cas moins forte en 3D, car en 2D, un trou correspond à un cylindre de hauteur infinie.

1.7 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons établi quelques formules d'asymptotique topologique pour des problèmes plus difficiles que ceux considérés jusqu'alors, en abordant notamment les systèmes non linéaires. Du travail reste à faire dans cette direction. Mériteraient par exemple d'être étudiés :

- le cas d'une condition de Neumann,
- le système de Navier-Stokes stationnaire complet avec compressibilité et équation d'état,
- les problèmes d'évolution.

Sur le plan numérique, nous avons confirmé que la méthode du gradient topologique était d'une grande efficacité dans de nombreux domaines. Néanmoins, ceci doit être nuancé par les deux remarques suivantes.

- En mécanique des fluides, l'exploration du domaine des grands Reynolds n'a pas été possible en raison de difficultés numériques liées à la nécessité d'un maillage très fin au voisinage des inclusions et de l'extrême sensibilité des équations face à l'insertion d'obstacles de taille finie. Le modèle est peut-être à revoir.
- Les algorithmes itératifs ont donné des résultats encourageants, mais qui pourraient sans doute être améliorés. En effet, nous ne disposons pas pour l'instant d'un critère efficace permettant de supprimer des trous qui ont été créés aux itérations précédentes. De plus, à la fin de l'optimisation, la topologie ne change plus et il serait certainement préférable de mettre en oeuvre une méthode d'optimisation de forme classique. La méthode *level-set* pourrait être adoptée car elle fonctionne elle aussi sur maillage fixe et permet justement de "refermer" des trous.

References

- [1] G. ALLAIRE, *Shape optimization by the homogenization method*, Springer, Applied Mathematical Sciences Vol. 146, 2002.
- [2] G. ALLAIRE, F. JOUVE, A. M. TOADER, *A level-set method for shape optimization*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334, pp. 1125-1130, 2002.
- [3] S. GARREAU, PH. GUILLAUME, M. MASMOUDI, *The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case*, SIAM J. Control Optim., 39(6), pp. 1756-1778, 2001.
- [4] PH. GUILLAUME, *Dérivées d'ordre supérieur en conception optimale de forme*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, 1994.
- [5] PH. GUILLAUME, K. SID IDRIS, *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem*, SIAM J. Control. Optim. 41(4), pp. 1052-1072, 2002.
- [6] PH. GUILLAUME, K. SID IDRIS, *Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations*, Rapport MIP no. 01-24, 2001.
- [7] M. HASSINE, M. MASMOUDI, *The topological asymptotic expansion for the quasi-Stokes problem*, Rapport MIP no. 02-29, 2002.
- [8] A.M. IL'IN, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Translations of mathematical monographs, Vol. 102, 1992.
- [9] P. MADER, *Optimisation topologique pour la conception de composants guidés*, Thèse, Université Paul Sabatier, 2002.
- [10] M. MASMOUDI, *The Topological Asymptotic*, Computational Methods for Control Applications, Ed. H. Kawarada and J. Périaux, International Series GAKUTO, 2002.
- [11] V. MAZ'YA, S. NAZAROV AND B. PLAMENEVSKIJ, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, Operator theory, advances and applications, Vol. 101, Birkhäuser Verlag, 2000.
- [12] F. MURAT, J. SIMON, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, thèse d'état, Paris, 1976.
- [13] F. MURAT, L. TARTAR, *Calcul des variations et homogénéisation*, Les méthodes de l'homogénéisation : théorie et applications en physique, Eyrolles, Paris, pp. 319-369, 1985.
- [14] J. POMMIER, *L'asymptotique topologique en électromagnétisme*, thèse de l'Université Paul Sabatier, 2002.

- [15] M. SHOENAUER, L. KALLEL AND F. JOUVE, *Mechanics inclusions identification by evolutionary computation*, Revue européenne des éléments finis, 5(5-6), pp. 619-648, 1996.
- [16] A. SCHUMACHER, *Topologieoptimisierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Topchpositionierungskriterien*, Thèse, Universität-Gesamthochschule-Siegen, 1995.
- [17] J. SOKOLOWSKI, A. ZOCHOWSKI, *On the topological derivative in shape optimization*, Technical report, INRIA, 1997.
- [18] M.S. VOGELIUS, D. VOLKOV. *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter*, Math. Model. Numer. Anal. 34, pp. 723-748, 2000.

Chapitre 2

Equation de Laplace 2D : localisation de fissures

Ce chapitre est constitué de l'article “**The topological asymptotic for the localization of cracks**”, soumis pour publication. Il s'agit d'un travail réalisé en collaboration avec Imene Horchani.

2.1 Introduction

The detection of geometrical defaults is an inverse problem which highly interests engineers. In the field of mechanics, for example, it is a crucial part of the checking of the integrity of structures. The present work deals with the localization of cracks for a very simple model problem : the stationary heat equation (Laplace equation) with heat flux imposed on the boundary and the temperature measured.

On the theoretical level, the first study on the identifiability of cracks was carried out by A. Friedman and M.S. Vogelius [7]. It was later completed by G. Alessandrini *et al* [2] and A. Ben Abda, H. Ben Ameer and M. Jaoua [4] who gave stability results. In the same time, several reconstruction algorithms were proposed [21]. Concurrently, shape optimization methods have progressed a lot. Notably, some authors [3, 5, 22] have worked out topological optimization tools in order to obtain domains whose topology is unknown. The topological sensitivity analysis was introduced by A. Schumacher [22] for the minimization of the compliance. Then J. Sokolowski and A. Zochowski [23] considered more general cost functionals using an adjoint method. To present the basic idea, let us consider a domain Ω of \mathbb{R}^2 , $j(\Omega) = J(u_\Omega)$ a cost function to be minimized, where u_Ω is solution to a given PDE problem defined in Ω . For a small parameter $\rho \geq 0$, let $\Omega \setminus \overline{B(x_0, \rho)}$ be the perturbed domain by the insertion of a circular hole of radius ρ . The topological sensitivity theory provides an asymptotic expansion of j when ρ tends to zero. It generally reads in the form :

$$j(\Omega \setminus \overline{B(x_0, \rho)}) - j(\Omega) = f(\rho)g(x_0) + o(f(\rho)).$$

Here, $f(\rho)$ is an explicit positive function going to zero with ρ . Hence, to minimize the criterion j , we just have to insert small holes at some points x where the function g is negative. The expression of the topological asymptotic has been obtained for various

problems, arbitrary shaped holes and general cost functions [10, 8, 11, 20] by using a functional framework based on a generalized adjoint method and a truncation technique [16].

In this paper is presented the mathematical analysis of the topological sensitivity for the Laplace equation with respect to the insertion of an arbitrary shaped crack on which is applied a Neumann boundary condition. Rather than using a truncation, we work in functional spaces defined on the variable domain, so that we have to build a relevant adjoint method. This approach greatly simplifies the theory in the case of a crack. The numerical part is devoted to the inverse geometrical problem described above. The quadratic misfit between the ‘‘Dirichlet’’ and ‘‘Neumann’’ solutions is used like a cost function. We exhibit the procedure as well as we present some numerical trials.

2.2 An adjoint method adapted to the topology optimization

Consider a real Hilbert space \mathcal{V}_ρ depending on the parameter $\rho \geq 0$ and \mathcal{W} a fixed Hilbert space such that, for all $\rho > 0$,

$$\mathcal{V}_0 \hookrightarrow \mathcal{V}_\rho \hookrightarrow \mathcal{W}. \quad (2.1)$$

For all $\rho \geq 0$, let a_ρ be a bilinear, continuous and coercive form on \mathcal{V}_ρ and l_ρ be a linear and continuous form on \mathcal{V}_ρ independent of ρ . We denote by u_ρ the solution to the problem

$$\begin{cases} u_\rho \in \mathcal{V}_\rho, \\ a_\rho(u_\rho, v) = l_\rho(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho. \end{cases} \quad (2.2)$$

Consider now a cost function $j(\rho) = J(u_\rho)$ where J is a differentiable function from \mathcal{W} into \mathbb{R} . We denote by v_ρ the solution to the problem

$$\begin{cases} v_\rho \in \mathcal{V}_\rho, \\ a_\rho(u, v_\rho) = -DJ(u_0)u \quad \forall u \in \mathcal{V}_\rho. \end{cases} \quad (2.3)$$

The functions u_0 and v_0 are respectively called the direct and adjoint states. We consider the following hypothesis.

Hypothesis 2.1 *There exist $\delta \in \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tending to zero with ρ such that*

1. $\|u_\rho - u_0\|_{\mathcal{W}} = O(f(\rho))$,
2. $a_\rho(u_0 - u_\rho, v_\rho) = f(\rho)\delta + o(f(\rho))$.

Then, the asymptotic expansion of $j(\rho)$ is given by the following theorem.

Theorem 2.1 *If Hypothesis 2.1 is satisfied, then*

$$j(\rho) - j(0) = f(\rho)\delta + o(f(\rho)).$$

Proof. Using the differentiability of J , Hypothesis 2.1 and Equation (2.3), we obtain successively

$$\begin{aligned}
 j(\rho) - j(0) &= J(u_\rho) - J(u_0) \\
 &= DJ(u_0)(u_\rho - u_0) + o(\|u_\rho - u_0\|_{\mathcal{W}}) \\
 &= -a_\rho(u_\rho - u_0, v_\rho) + o(f(\rho)) \\
 &= f(\rho)\delta + o(f(\rho)).
 \end{aligned}$$

□

2.3 The Poisson problem

2.3.1 Formulation of the problem

Let Ω be an open, bounded and connected subset of \mathbb{R}^2 with smooth boundary $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, Γ_0 being of nonzero measure. Consider $f \in L^2(\Omega)$ and $g \in H_0^{1/2}(\Gamma_1)'$ (see Appendix 2.6). The problem we study is the following : find $u_0 \in H^1(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} \Delta u_0 = f & \text{in } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n u_0 = g & \text{on } \Gamma_1. \end{cases} \quad (2.4)$$

For a given $x_0 \in \Omega$, consider the cracked domain $\Omega_\rho = \Omega \setminus \sigma_\rho$, $\sigma_\rho = x_0 + \rho\sigma$, where σ is a fixed bounded manifold of dimension 1 and of class \mathcal{C}^1 included in \mathbb{R}^2 (see Figure 2.1). We assume that Ω_ρ is connected. Possibly changing the coordinate system, we will suppose for convenience that $x_0 = 0$. The new field is solution to the problem :

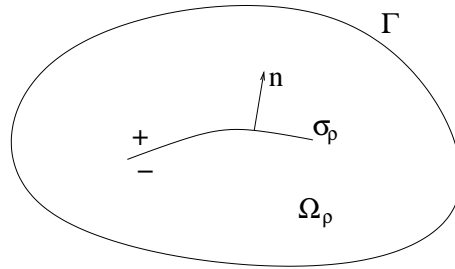


FIG. 2.1 – The cracked domain.

find $u_\rho \in H^1(\Omega_\rho)$ such that

$$\begin{cases} \Delta u_\rho = f & \text{in } \Omega_\rho, \\ u_\rho = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n u_\rho = g & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n u_\rho = 0 & \text{on } \sigma_\rho. \end{cases} \quad (2.5)$$

The variational formulation associated to Problem (2.5) is Problem (2.2) with

$$\mathcal{V}_\rho = \{u \in H^1(\Omega_\rho), u|_{\Gamma_0} = 0\}$$

and for all $u, v \in \mathcal{V}_\rho$,

$$\begin{cases} a_\rho(u, v) = \int_{\Omega_\rho} \nabla u \cdot \nabla v dx, \\ l_\rho(v) = \int_{\Gamma_1} g v ds. \end{cases} \quad (2.6)$$

As usual in analysis, the duality product between $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$ and $H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)$ is denoted by an integral.

Let D be a fixed open set containing the origin and such that $D \subset \Omega$. We define the space

$$\mathcal{W} = \{u \in L^2(\Omega), u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})\}. \quad (2.7)$$

It is equipped with the norm

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = (\|u\|_{0,D}^2 + \|u\|_{1,\Omega \setminus \overline{D}}^2)^{1/2}.$$

An immediate application of Lemma 2.4 of Section 2.3.4 yields

$$\|u_\rho - u_0\|_{\mathcal{W}} = O(\rho^2).$$

The first condition of Hypothesis 2.1 is fulfilled. We consider now a differentiable cost function $J : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$. For all ρ , we define the field v_ρ as the solution to Problem (2.3).

The objective of the following subsection is to determine in an heuristic manner $f(\rho)$ and δ such that the second part of Hypothesis 2.1 is verified.

2.3.2 Heuristics

Preliminary calculations

We obtain by using the Green formula

$$\begin{aligned} a_\rho(u_0 - u_\rho, v_\rho) &= \int_{\Omega_\rho} \nabla(u_0 - u_\rho) \cdot \nabla v_\rho dx \\ &= - \int_{\sigma_\rho} \partial_n u_0 [v_\rho] ds \end{aligned}$$

where $[v_\rho] = v_\rho|_{\sigma_\rho^+} - v_\rho|_{\sigma_\rho^-} \in H_{00}^{1/2}(\sigma_\rho)$ (see Figure 2.1). We introduce the variation

$$w_\rho = v_\rho - v_0.$$

From (2.3), we obtain that w_ρ is solution to the problem : find $w_\rho \in H^1(\Omega_\rho)$ such that

$$\begin{cases} \Delta w_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ w_\rho = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n w_\rho = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n w_\rho = -\partial_n v_0 & \text{on } \sigma_\rho. \end{cases} \quad (2.8)$$

Estimation of w_ρ

1. *First approximation* : We approximate w_ρ by h_ρ the solution to the exterior problem : find $h_\rho \in W^1(\mathbb{R}^2 \setminus \sigma_\rho)$ (see Appendix 2.6) such that

$$\begin{cases} \Delta h_\rho = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \sigma_\rho, \\ \partial_n h_\rho = -\partial_n v_0 & \text{on } \sigma_\rho, \\ h_\rho = 0 & \text{at } \infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

Then, we use the change of variable

$$h_\rho(x) = \rho H_\rho \left(\frac{x}{\rho} \right).$$

The function H_ρ is solution to : find $H_\rho \in W^1(\mathbb{R}^2 \setminus \sigma)$ such that

$$\begin{cases} \Delta H_\rho = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \sigma, \\ \partial_n H_\rho(x) = -\partial_n v_0(\rho x) & \text{on } \sigma, \\ H_\rho = 0 & \text{at } \infty. \end{cases}$$

By Theorem 2.5 of Appendix 2.6, H_ρ reads

$$H_\rho(x) = \int_\sigma q_\rho(y) \partial_{n_y} E(x-y) ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \sigma, \quad (2.10)$$

where $q_\rho \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$ is defined by

$$q_\rho = T(-\partial_n v_0(\rho x)), \quad (2.11)$$

T being an isomorphism from $H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ into $H_{00}^{1/2}(\sigma)$ depending on the shape of σ .

2. *Second approximation* : We approximate q_ρ by

$$q = T(-\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}). \quad (2.12)$$

Asymptotic expansion

We denote

$$E_1(\rho) = - \int_{\sigma_\rho} \partial_n u_0 [w_\rho - h_\rho] ds.$$

Then

$$\begin{aligned} a_\rho(u_0 - u_\rho, v_\rho) &= - \int_{\sigma_\rho} \partial_n u_0 [w_\rho] ds \\ &= - \int_{\sigma_\rho} \partial_n u_0 [h_\rho] ds + E_1(\rho) \\ &= -\rho^2 \int_\sigma \partial_n u_0(\rho x) [H_\rho] ds + E_1(\rho). \end{aligned}$$

We denote also

$$E_2(\rho) = -\rho^2 \int_{\sigma} \partial_n u_0(\rho x)(q_{\rho} - q) ds.$$

By the jump relation of theorem 2.5, we have

$$\begin{aligned} a_{\rho}(u_0 - u_{\rho}, v_{\rho}) &= \rho^2 \int_{\sigma} \partial_n u_0(\rho x) q_{\rho} ds + E_1(\rho) \\ &= \rho^2 \int_{\sigma} \partial_n u_0(\rho x) q ds + E_1(\rho) + E_2(\rho). \end{aligned}$$

Finally, we set

$$E_3(\rho) = \rho^2 \int_{\sigma} (\partial_n u_0(\rho x) - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}) q ds$$

and we obtain

$$a_{\rho}(u_0 - u_{\rho}, v_{\rho}) = \rho^2 \int_{\sigma} \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} q ds + E_1(\rho) + E_2(\rho) + E_3(\rho).$$

Therefore, the asymptotic expansion of the cost function is given by the following theorem which will be proved in Subsection 2.3.4.

Theorem 2.2 *Supposing that*

- the cost function J is differentiable on \mathcal{W} defined by (2.7),
- the source terms f and $DJ(u_0)$ are of regularity H^2 in a neighborhood of the origin,
- the direct and adjoint states are solutions to (2.2) and (2.3) with a_{ρ} and l_{ρ} defined by (2.6),
- the density q is defined by (2.12),

the cost function has the following asymptotic expansion when ρ tends to zero :

$$j(\rho) - j(0) = \rho^2 \nabla u_0(0) \cdot \int_{\sigma} \mathbf{q} \mathbf{n} ds + o(\rho^2). \quad (2.13)$$

2.3.3 Straight crack

Let σ be the segment $\{(x_1, 0), -1 < x_1 < 1\}$. Using Theorem 2.5 , we check that the solution to Equation (2.12) is

$$q(x) = -2(\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}) \sqrt{1 - x_1^2} \quad \forall x \in \sigma.$$

We have

$$\int_{\sigma} q(x) ds(x) = -\pi \nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}$$

and the topological asymptotic becomes

$$j(\rho) - j(0) = -\pi \rho^2 (\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n})(\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}) + o(\rho^2). \quad (2.14)$$

Remark 2.2 *Formula (2.14) can be extended to the case of a vector field. Denoting by u_0^i and v_0^i , $i = 1..P$ the components of u_0 and v_0 , we have the following asymptotic expansion :*

$$j(\rho) - j(0) = -\pi \rho^2 \sum_{i=1}^P (\nabla u_0^i(0) \cdot \mathbf{n})(\nabla v_0^i(0) \cdot \mathbf{n}) + o(\rho^2). \quad (2.15)$$

2.3.4 Proofs

Preliminary lemmas

Lemma 2.3 Consider $h \in H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ and let $z \in W^1(\mathbb{R}^2 \setminus \sigma)$ be the solution to the problem

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \sigma, \\ z = 0 & \text{at } \infty, \\ \partial_n z = h & \text{on } \sigma. \end{cases}$$

There exists $c > 0$ such that

$$|z|_{1, \frac{1}{\rho}(\Omega \setminus \bar{D})} \leq c\rho \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'}$$

Proof. By Theorem 2.5, there exists $q \in H_{00}^{1/2}(\sigma)$ such that

$$z(x) = \int_{\sigma} q(y) \partial_{n_y} E(x-y) ds(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \sigma,$$

where $q = Jh$. Using a Taylor expansion of E computed at the point x and the continuity of J , we have that

$$|\nabla z(x)| \leq \frac{c}{|x|^2} \|h\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'},$$

from which we deduce the result. \square

Lemma 2.4 Consider $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'$, $\rho \geq 0$, $h \in H_{00}^{1/2}(\sigma_\rho)'$ and let $z \in H^1(\Omega_\rho)$ be the solution to the problem

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ z = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n z = g & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n z = h & \text{on } \sigma_\rho. \end{cases} \quad (2.16)$$

There exist positive constants independent of ρ , g and h such that for all ρ sufficiently small

$$\|z\|_{0, \Omega_\rho} \leq c\rho^2 \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} + c\|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'},$$

$$|z|_{1, \Omega_\rho} \leq c\rho \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} + c\|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'},$$

$$\|z\|_{1, \Omega \setminus \bar{D}} \leq c\rho^2 \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} + c\|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'}$$

Proof. The function z is splitted into $z_1 + z_2$ respectively solutions to

$$\begin{cases} \Delta z_1 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \sigma_\rho, \\ z_1 = 0 & \text{at } \infty, \\ \partial_n z_1 = h & \text{on } \sigma_\rho, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta z_2 = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ z_2 = -z_1 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n z_2 = g - \partial_n z_1 & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n z_2 = 0 & \text{on } \sigma_\rho. \end{cases}$$

The field $\tilde{z}_1(x) = z_1(\rho x)/\rho$ is solution to

$$\begin{cases} \Delta \tilde{z}_1 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \sigma, \\ \tilde{z}_1 = 0 & \text{at } \infty, \\ \partial_n \tilde{z}_1 = h(\rho x) & \text{on } \sigma. \end{cases}$$

By elliptic regularity, we have

$$\|\tilde{z}_1\|_{W^1(\mathbb{R}^2 \setminus \sigma)} \leq c \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'}$$

Lemma 2.3 yields

$$\|\tilde{z}_1\|_{1, \frac{1}{\rho}(\Omega \setminus \overline{D})} \leq c \rho \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'}$$

Hence, by change of variable,

$$\|z_1\|_{0, \Omega_\rho} \leq c \rho^2 \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'},$$

$$\|z_1\|_{1, \Omega_\rho} \leq c \rho \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'},$$

$$\|z_1\|_{1, \Omega \setminus \overline{D}} \leq c \rho^2 \|h(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'}$$

Moreover, we have by elliptic regularity

$$\|z_2\|_{1, \Omega_\rho} \leq c \|z_1\|_{1, \Omega \setminus \overline{D}} + c \|g\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_1)'},$$

which completes the proof. \square

Proof of Theorem 2.2

The result comes from Theorem 2.1 if we prove that $E_i(\rho) = o(\rho^2)$ for $i = 1..3$.

1. We have

$$\begin{aligned} |E_1(\rho)| &= \rho \left| \int_{\sigma} \partial_n u_0(\rho x) [(w_\rho - h_\rho)(\rho x)] ds \right| \\ &\leq \rho \|\partial_n u_0(\rho x)\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)'} \|[(w_\rho - h_\rho)(\rho x)]\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \\ &\leq c \rho \| [e_\rho(\rho x)] \|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)}, \end{aligned}$$

where $e_\rho = w_\rho - h_\rho$ is solution to

$$\begin{cases} \Delta e_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ e_\rho = -h_\rho & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n e_\rho = -\partial_n h_\rho & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n e_\rho = 0 & \text{on } \sigma_\rho. \end{cases}$$

Denoting by B a ball containing σ , we obtain by using the trace theorem

$$\| [e_\rho(\rho x)] \|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} = \inf_{\gamma \in \mathbb{R}} \| [e_\rho(\rho x) + \gamma] \|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} \leq c \inf_{\gamma \in \mathbb{R}} \| e_\rho(\rho x) + \gamma \|_{1, B \setminus \sigma} \leq c |e_\rho(\rho x)|_{1, B \setminus \sigma}.$$

A change of variable and the elliptic regularity yield

$$\| [e_\rho(\rho x)] \|_{H_0^{1/2}(\sigma)} \leq c |e_\rho|_{1, \Omega_\rho} \leq c \inf_{\gamma \in \mathbb{R}} \| e_\rho + \gamma \|_{1, \Omega_\rho} \leq c \inf_{\gamma \in \mathbb{R}} \| h_\rho + \gamma \|_{1, \Omega \setminus \bar{D}} \leq c |h_\rho|_{1, \Omega \setminus \bar{D}}.$$

Next, a change of variable and Lemma 2.3 yield

$$\| [e_\rho(\rho x)] \|_{H_0^{1/2}(\sigma)} \leq c \rho |H_\rho|_{1, \frac{1}{\rho}(\Omega \setminus \bar{D})} \leq c \rho^2 \| \partial_n v_0(\rho x) \|_{H_0^{1/2}(\sigma')}.$$

Finally,

$$|E_1(\rho)| \leq c \rho^3.$$

2. We have

$$\begin{aligned} |E_2(\rho)| &\leq \rho^2 \| \partial_n u_0(\rho x) \|_{H_0^{1/2}(\sigma')} \| q_\rho - q \|_{H_0^{1/2}(\sigma)} \\ &\leq c \rho^2 \| q_\rho - q \|_{H_0^{1/2}(\sigma)}. \end{aligned}$$

By continuity of the operator T , we have

$$\begin{aligned} \| q_\rho - q \|_{H_0^{1/2}(\sigma)} &\leq c \| \partial_n v_0(\rho x) - \nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} \|_{H_0^{1/2}(\sigma')} \\ &\leq c \| \partial_n v_0(\rho x) - \nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} \|_{C^0(\sigma)}. \end{aligned}$$

Yet, v_0 is of class \mathcal{C}^2 in a neighborhood of the origin. Thus,

$$\| q_\rho - q \|_{H_0^{1/2}(\sigma)} \leq c \rho \tag{2.17}$$

and

$$|E_2(\rho)| \leq c \rho^3.$$

3. We have

$$|E_3(\rho)| \leq \rho^2 \| \partial_n u_0(\rho x) - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} \|_{H_0^{1/2}(\sigma')} \| q \|_{H_0^{1/2}(\sigma)}.$$

As u_0 is of class \mathcal{C}^2 in a neighborhood of the origin,

$$\| \partial_n u_0(\rho x) - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} \|_{H_0^{1/2}(\sigma')} \leq \| \partial_n u_0(\rho x) - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} \|_{C^0(\sigma)} \leq c \rho.$$

Hence

$$|E_3(\rho)| \leq c \rho^3.$$

□

2.4 Numerical applications

In this numerical study, we use Formula (2.15) to treat a problem of localization of cracks.

2.4.1 The inverse problem

Let Ω be a domain containing a perfectly insulating crack σ^* . On the boundary Γ of Ω , we impose a heat flux φ (input) and we measure the temperature T . The problem under consideration can be formulated as follows : given Ω , φ and T , find $\sigma \subset \Omega$ such that the solution $u(\sigma)$ to

$$\begin{cases} \Delta u(\sigma) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \sigma, \\ \partial_n u(\sigma) = \varphi & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n u(\sigma) = 0 & \text{on } \sigma. \end{cases} \quad (2.18)$$

verifies $u(\sigma)|_{\Gamma} = T$. For the well-posedness of this PDE , we assume that

$$\int_{\Gamma} \varphi ds = 0.$$

2.4.2 The cost function and the topological gradient

The boundary conditions (T, φ) being over-determined we can define for any crack $\sigma \subset \Omega$ two direct problems [7] :

– the “Dirichlet” problem :

$$\begin{cases} \Delta u_D(\sigma) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \sigma, \\ u_D(\sigma) = T & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n u_D(\sigma) = 0 & \text{on } \sigma, \end{cases} \quad (2.19)$$

– the “Neumann” problem :

$$\begin{cases} \Delta u_N(\sigma) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \sigma, \\ \partial_n u_N(\sigma) = \varphi & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n u_N(\sigma) = 0 & \text{on } \sigma. \end{cases} \quad (2.20)$$

The unknown crack σ^* is reached when there is no misfit between both solutions, that is, when the function cost

$$J(u_D, u_N) = \frac{1}{2} \|u_D - u_N\|_{L^2(\Omega)}^2$$

vanishes. We define two adjoint states v_D and v_N respectively solutions to :

$$\begin{cases} -\Delta v_D = -(u_D - u_N) & \text{in } \Omega, \\ v_D = 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\begin{cases} -\Delta v_N = +(u_D - u_N) & \text{in } \Omega, \\ \partial_n v_N = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (2.22)$$

Here and in the sequel, u_D and u_N denote the direct states without crack. Using a vector field $U = (u_D, u_N)$, Remark 2.2 provides the following expression of the topological gradient for this cost function :

$$g(x, \mathbf{n}) = -[(\nabla u_D(x) \cdot \mathbf{n})(\nabla v_D(x) \cdot \mathbf{n}) + (\nabla u_N(x) \cdot \mathbf{n})(\nabla v_N(x) \cdot \mathbf{n})].$$

It follows from there that the topological gradient admits the following expression :

$$g(x, \mathbf{n}) = \mathbf{n}^T M(x) \mathbf{n} \quad (2.23)$$

where $M(x)$ is the symmetric matrix defined by

$$M(x) = -\text{sym} (\nabla u_D(x) \otimes \nabla v_D(x) + \nabla u_N(x) \otimes \nabla v_N(x)).$$

According to this expression, $g(x, \mathbf{n})$ is minimal at x fixed when the normal \mathbf{n} is an eigenvector associated to the smallest eigenvalue $\lambda_1(x)$ of the matrix $M(x)$. Then, $g(x, \mathbf{n}) = \lambda_1(x)$. In the sequel, this value will be considered as the topological gradient.

2.4.3 Numerical results in one iteration without noise

Let us now describe a simple and very fast numerical procedure. First, we solve the two direct problems and the two adjoint problems (Dirichlet and Neumann). Then, at each element of the mesh, we compute the matrix $M(x)$ and its eigenvalues. The crack likely lies in the most negative gradient regions.

Case of a single crack

Let Ω be the unit disc and σ^* be a line crack inside Ω . The heat flux φ is imposed on Γ by the boundary condition $\varphi = x_2$, the second component of x . We apply the procedure described above. The location of the unknown crack as well as the topological gradient are indicated in Figures 2.2 and 2.3. We observe that the most negative values of the topological gradient are located around the actual crack.

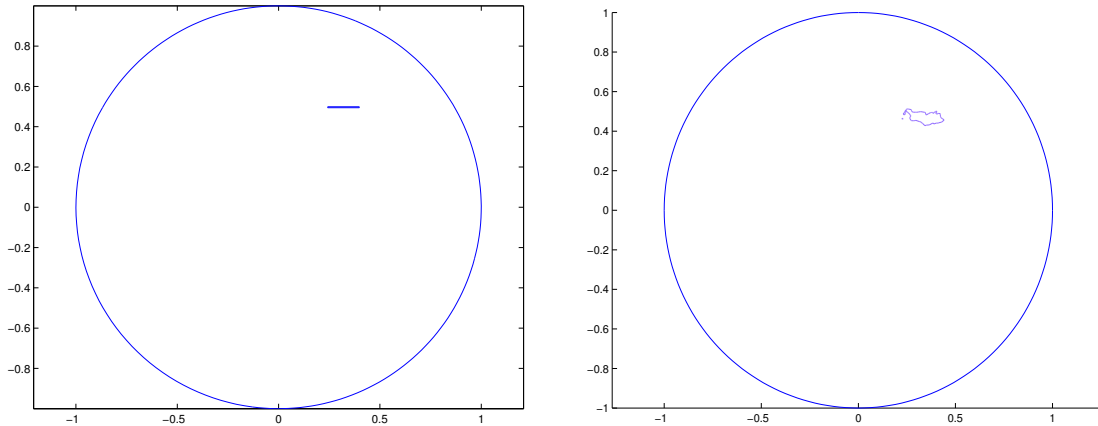


FIG. 2.2 – On left : the unknown crack ; on right : an iso-value of the topological gradient.

Case of multi-cracks

The computation of the topological gradient does not depend on the number of cracks inside the domain. This remark is illustrated by the following test. The actual

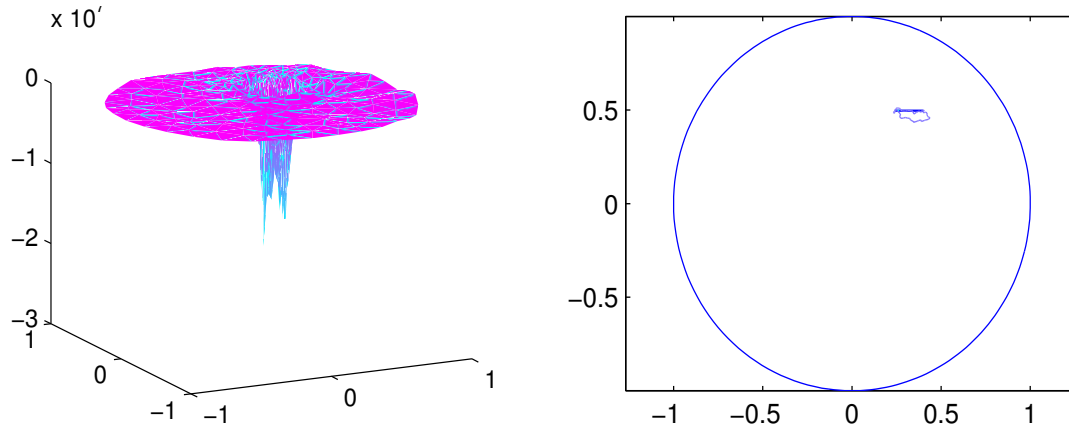


FIG. 2.3 – On left : the topological gradient ; on right superposition of the actual crack and a topological gradient isovalue.

cracks and the topological gradient are represented in Figure 2.4. We use here two flux $\varphi = x_1$ and $\varphi = x_2$. We emphasize that these results are again obtained in only one iteration.

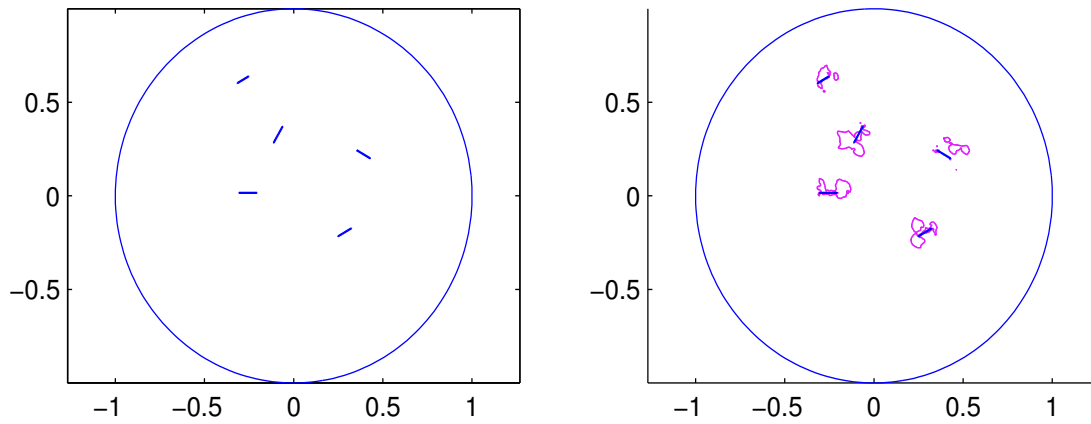


FIG. 2.4 – On left : the actual cracks ; on right : superposition of the actual cracks and a topological gradient isovalue.

2.4.4 Numerical results in one iteration with noise

We focus in this section on simulated noisy measurements. An additive noise (random from MATLAB) comes in to perturb the exact data. Figures 2.5 and 2.6 show the results for 5%, 10% and 20% of noise. These tests indicate that the presence of a moderate noise has a minor effect on the topological gradient.

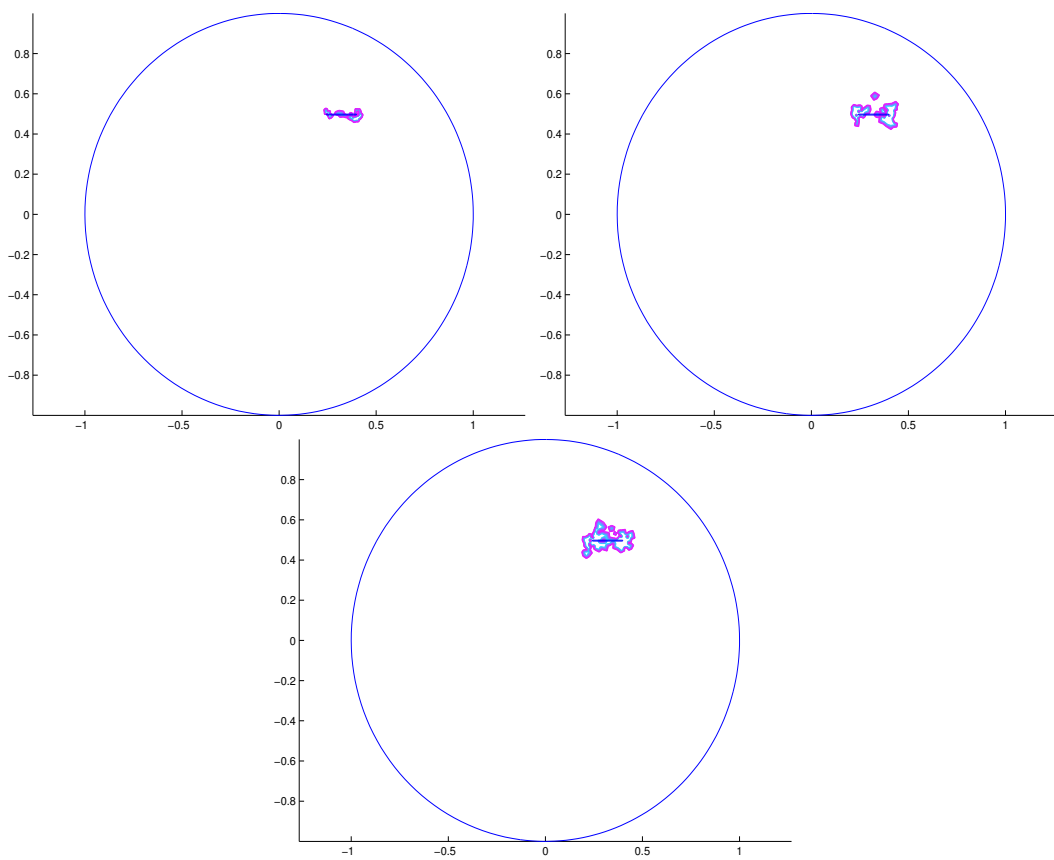


FIG. 2.5 – Respectively 5%, 10% and 20% of noise.

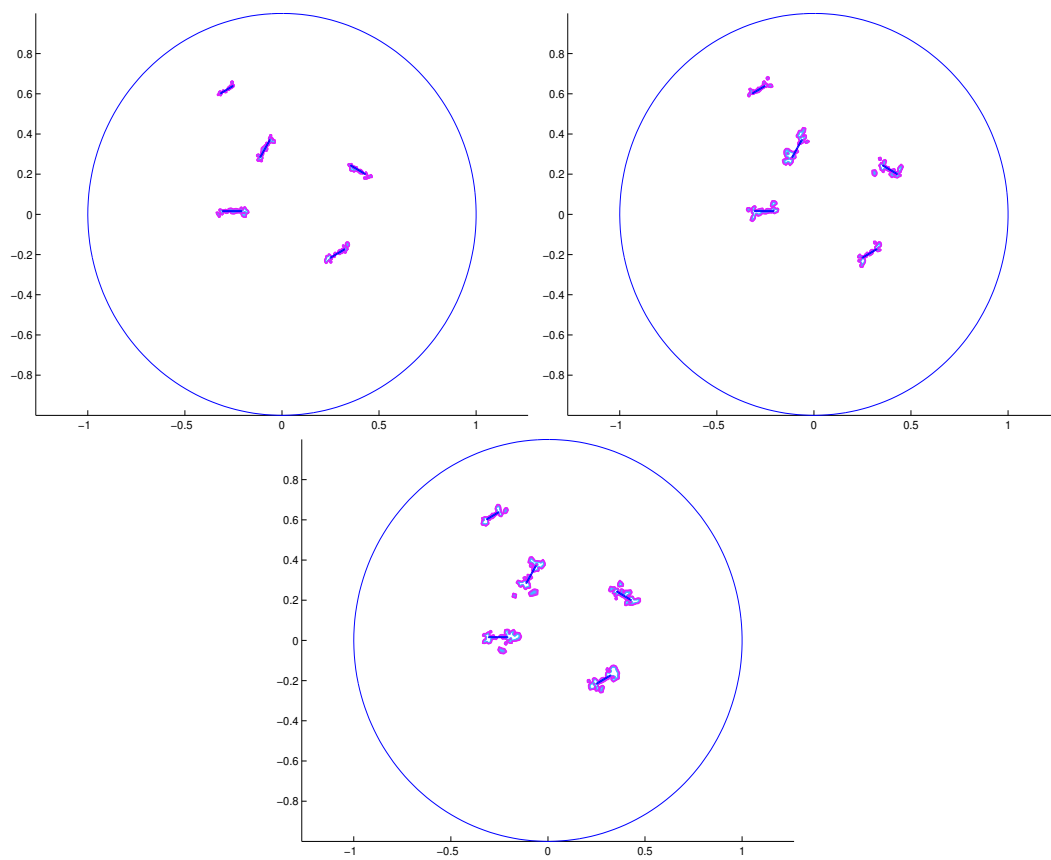


FIG. 2.6 – Respectively 5%, 10% and 20% of noise.

2.4.5 Identification of cracks with incomplete data

It is a more realistic situation where a part only of the border is accessible to measurements. Let Ω be the unit disc with boundary $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. The heat flux φ is imposed on Γ and we measure the temperature T on Γ_1 which is here a quarter of circle. For any crack $\sigma \subset \Omega$, we consider the two following problems.

– the “Neumann-Dirichlet” problem :

$$\begin{cases} \Delta u_D(\sigma) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \sigma, \\ u_D(\sigma) = T & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n u_D(\sigma) = \varphi & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n u_D(\sigma) = 0 & \text{on } \sigma, \end{cases} \quad (2.24)$$

– the “Neumann” problem :

$$\begin{cases} \Delta u_N(\sigma) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \sigma, \\ \partial_n u_N(\sigma) = \varphi & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n u_N(\sigma) = 0 & \text{on } \sigma. \end{cases} \quad (2.25)$$

We use the numerical procedure described before. The results are represented in Figure 2.7. The cracks are located in a satisfactory manner.

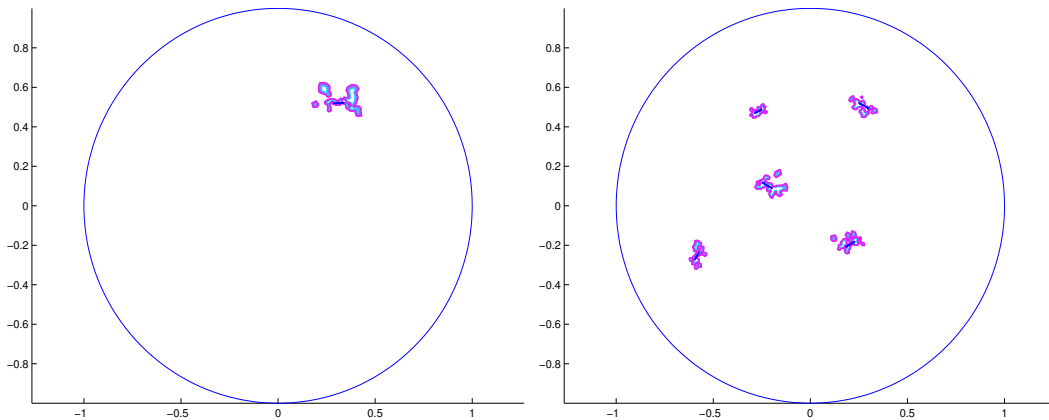


FIG. 2.7 – Topological gradient with incomplete data.

2.4.6 An iterative method

The algorithm consists in inserting at each iteration an isolating element (that is, an element whose thermal conductivity is very small) where the topological gradient is the most negative. The process is stopped when the cost function increases.

Algorithm

Initialization : Choose the initial domain Ω_0 . It is meshed and it is identified with the set of its elements : $\Omega_0 = \{x_n, n = 1..N\}$. Set $k = 0$.

Repeat :

1. Solve the direct and adjoint problems in Ω_k .
2. Compute the topological gradient g_k .
3. Seek the minimum of the topological gradient : $y_k = \operatorname{argmin}(g_k(x), x \in \Omega_k)$.
4. Set $\Omega_{k+1} = \Omega_k \setminus \{y_k\}$.
5. $k \leftarrow k + 1$.

We wish here to recover two cracks with the help of one flux $\varphi = x_2$ (complete data, no additive noise). The final image is represented in Figure 2.8.

Remark 2.3 *For more complex problems, we would have interest to use a more sophisticated optimization method, including for example a line search or a conjugate gradient like descent direction.*

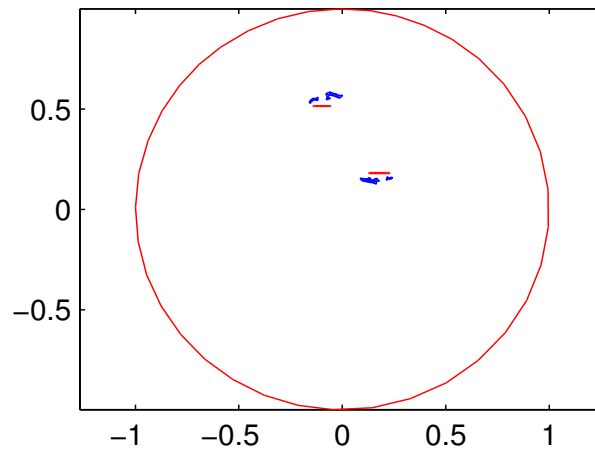


FIG. 2.8 – The actual cracks and the reconstructed cracks after a few iterations.

2.5 Conclusion

The mathematical framework presented in this paper can be adapted to determine the sensitivity with respect to the insertion of a small crack for a large class of linear and elliptic problems.

The topological gradient leads to fast methods of localization of cracks in that it only requires to solve the direct and adjoint problems and satisfactory results are obtained after a small number of iterations performed on a fixed grid. These methods can provide a good initial guess for more accurate classical shape optimization algorithms [21, 14].

2.6 Appendix : solution of the Laplace exterior problem for a crack

2.6.1 A weighted Sobolev space

Let σ be a bounded manifold of dimension 1, of class \mathcal{C}^1 included in \mathbb{R}^2 and $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \sigma$. We suppose that Σ is connected. The space $W^1(\Sigma)$ is defined by (see *e.g.* [12, 13, 9]) :

$$W^1(\Sigma) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Sigma), \frac{u}{(1+r)\ln(1+r)} \in L^2(\Sigma) \text{ and } \nabla u \in L^2(\Sigma) \right\}.$$

It is equipped with the norm

$$\|u\|_{W^1(\Sigma)} = \left(\left\| \frac{u}{(1+r)\ln(1+r)} \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{1/2}$$

and the semi-norm

$$|u|_{W^1(\Sigma)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Sigma)}.$$

2.6.2 The Neumann problem for a crack

We are interested in the following problem.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Sigma, \\ u = 0 & \text{at } \infty, \\ \partial_n u = g & \text{on } \sigma. \end{cases} \quad (2.26)$$

We assume that $\bar{\sigma} \subset \tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}$ being a bounded manifold of the same dimension and of class \mathcal{C}^1 . We define the space

$$H_{00}^{1/2}(\sigma) = \{u|_{\sigma}, u \in H^{1/2}(\tilde{\sigma}), \text{Supp}(u) \subset \bar{\sigma}\}. \quad (2.27)$$

It is equipped with the norm

$$\|u|_{\sigma}\|_{H_{00}^{1/2}(\sigma)} = \|u\|_{H^{1/2}(\tilde{\sigma})}.$$

In dimension 2, the fundamental solution of the Laplace operator reads :

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|.$$

We have the following theorem (see [9, 19]).

Theorem 2.5 Consider $g \in H_{00}^{1/2}(\sigma)'$.

1. Problem (2.26) has a unique solution $u \in W_0^1(\Omega)$ and the map $g \mapsto u$ is linear and continuous from $H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ into the quotient space $W^1(\Sigma)/\mathbb{R}$.
2. The solution u reads

$$u(x) = \int_{\sigma} q(y) \partial_{n_y} E(x-y) ds(y) \quad \forall x \in \Sigma,$$

where $q = Tg$, T being an isomorphism from $H_{00}^{1/2}(\sigma)'$ into $H_{00}^{1/2}(\sigma)$.

3. We have the jump relation (see Figure 2.1 for the orientation) :

$$[u] = -q.$$

4. If σ is straight with curvilinear abscissa s , we have for all $q \in (H_{00}^{1/2} \cap C^1)(\sigma)$ and $\varphi \in \mathcal{D}(\sigma)$

$$\langle T^{-1}q, \varphi \rangle = - \int_{\sigma} \int_{\sigma} \frac{dq}{ds}(x) \frac{d\varphi}{ds}(y) E(x-y) ds(x) ds(y).$$

References

- [1] G. Alessandrini and A. Diaz Valenzuela. Unique determination of multiple cracks by two measurements. *SIAM J. Control Optim.*, 1996.
- [2] G. Alessandrini, E. Beretta and S. Vessela. Determining linear cracks by boundary measurements. *SIAM J. Math. Anal.*, 1996.
- [3] G. Allaire. Shape optimization by the homogenization method. Springer, Applied Mathematical Sciences Vol. 146, 2002.
- [4] A. Ben Abda, H. Ben Ameer and M. Jaoua. Identification of 2D cracks by elastic boundary measurements, *Inverse Problems*, 15, pp. 67-77, 1999.
- [5] M. Bendsoe. Optimal topology design of continuum structure : an introduction. Technical report, Departement of mathematics, Technical University of Denmark, DK2800 Lyngby, Denmark, september 1996. 20(3) :371-402, 1986.
- [6] R. Dautray and J.-L.Lions. Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Masson, collection CEA, 1987.
- [7] A. Friedman and M.S. Vogelius. Determining cracks by boundary measurements, *Indiana Univ. Math. J.* 38(3), pp. 527-556, 1989.
- [8] S. Garreau, Ph. Guillaume and M. Masmoudi. The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case, *SIAM J. Control. Optim.*, 39(6), pp. 1756-1778, 2001.
- [9] J. Giroire and J.-C. Nédélec. Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potentiel. *Mathematics of computation*, Vol. 32, Num. 144, pp. 973-990, 1978.
- [10] Ph. Guillaume, K. Sididris. The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem. *SIAM J. Control. Optim.* 41(4), pp 1052-1072, 2002.
- [11] Ph. Guillaume, K. Sididris. Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations, Rapport MIP no.01-24, 2001.
- [12] M. Jaoua. Equations intégrales pour un problème singulier dans le plan. Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 1977.
- [13] M.-N. Le Roux. Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis. Thèse, Université de Rennes, 1974.
- [14] S. Kubo, K. Ohji. Inverse problems and the electric potential computed tomography method as one of their application, *Mechanical Modeling of New Electromagnetic Materials*, 1990.

- [15] J.L. Lions - E. Magenes. Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1. Dunod, 1968.
- [16] M. Masmoudi. The Topological Asymptotic, in Computational Methods for Control Applications. International Series GAKUTO, 2002.
- [17] F. Murat and J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Thèse d'état, Paris, 1976.
- [18] S.A. Nazarov and J. Sokolowski. Asymptotic analysis of shape functionals. Technical report RR-4633, INRIA, 2002. 2000.
- [19] N. Nishimura and S. Kobayashi. A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection, *Int. J. Num. Methods Engrg.* 32, pp. 1371-1387, 1991.
- [20] B. Samet, S. Amstutz and M. Masmoudi. The topological asymptotic for the Helmholtz equation. Accepted in *SIAM J. Control. Optim.*
- [21] F. Santosa, M. Vogelius. A computational algorithm to determine cracks from electrostatic boundary measurements. *Int. J. Eng. Sci.* 29, pp. 917-937, 1991
- [22] A. Schumacher. Topologieoptimisierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Topchpositionierungskriterien. Thesis, Universität-Gesamthochschule-Siegen, 1995.
- [23] J. Sokolowski and A. Zochowski. On the topological derivative in shape optimization. Technical report, INRIA, 1997.

Chapitre 3

Equation de Helmholtz 2D avec condition de Dirichlet au bord d'un trou circulaire

Ce chapitre est constitué de l'article “**The topological asymptotic for the Helmholtz equation**”, accepté dans *SIAM journal on control and optimization*. Il s'agit d'un travail réalisé en collaboration avec Bessem Samet et Mohamed Masmoudi.

3.1 Introduction

Classical shape optimization methods are based on the perturbation of the boundary of the initial shape. The initial and the final shape have the same topology. The aim of topological optimization is to find an optimal shape without any *a priori* assumption about the topology of the structure. Many important contributions in this field are concerned with structural mechanics and in particular the minimization of the compliance (external work) subject to a volume constraint. In view of the fact that the optimal structure has generally a large number of small holes, most authors [3, 5, 15] have considered composite material optimization. Using the homogenization theory G. Allaire *and al.* [3] exhibit a class of laminated materials with an explicit expression for the optimal material at any point of the structure. The range of application of this approach is quite restricted. For this reason, global optimization techniques like genetic algorithms and simulated annealing are used in order to solve more general problems [26]. Unfortunately, these methods are very slow.

The topological gradient has been introduced by A.Schumacher [27] to minimize a cost function $j(\Omega) = J(\Omega, u_\Omega)$ where u_Ω is the solution to a partial differential equation defined in the domain Ω . The idea is to create a spherical hole $B(x, \varepsilon)$ of radius ε around a point x in Ω . Generally, an asymptotic expansion of the function j can be obtained in the following form :

$$j(\Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}) - j(\Omega) = f(\varepsilon)g(x) + o(f(\varepsilon)). \quad (3.1)$$

The function $f(\varepsilon)$ is positive and tends to zero with ε . We call this expansion the topological asymptotic. To minimize the criterion, we have to create holes where g

is negative. The optimality condition $g \geq 0$ in Ω is exactly what G. Buttazzo and G. Dal Maso [6] have obtained for the Laplace equation, using a relaxed formulation. The topological gradient $g(x)$ has been computed by A. Schumacher [27] in the case of compliance minimization with Neumann condition on the boundary of the hole. In the same context, J. Sokolowski [25] gave some mathematical justifications in the plane stress case, and generalized it to various cost functions. A topological sensitivity framework using an adaptation of the adjoint method and a truncation technique has been introduced in [17] in the case of an homogeneous Dirichlet condition imposed on the boundary of a circular hole. The fundamental property of the adjoint technique is to provide the variation of a function with respect to a parameter by using a solution u_Ω and an adjoint state p_Ω which do not depend on the chosen parameter. From the numerical view point, only two systems have to be solved for obtaining $g(x)$ for all $x \in \Omega$. This observation leads to very efficient numerical algorithms. In [10, 11, 12], the topological sensitivity has been obtained in the contexts of linear elasticity, the Poisson equation and the Stokes problem with general shape functions and arbitrary shaped holes. These publications are concerned with PDE's operators whose symbols are homogeneous polynomials.

In this paper, we are interested in the differential operator

$$P = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k^2,$$

whose symbol is not homogeneous. First, an adaptation of the adjoint method to the topological context is proposed in section 3.2 for the operator P . Next, a wave guide problem, the truncation method and the explicit expression of the topological asymptotic are presented in Section 3.3. Finally, an optimization algorithm and some applications of the topological gradient to wave guides optimization are given in section 3.4. This work is done in collaboration with Alcatel Space Industries.

3.2 A generalized adjoint method

In this section, the adjoint method is adapted to topological optimization. Let \mathcal{V} be a fixed complex Hilbert space. For $\varepsilon \geq 0$, let $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ be a sesquilinear and continuous form on \mathcal{V} and l_ε be a semilinear and continuous form on \mathcal{V} . We consider the following assumptions.

Hypothesis 3.1 *There exists a sesquilinear and continuous form δ_a , a semilinear and continuous form δ_l , and a real function $f(\varepsilon) > 0$ defined on \mathbb{R}_+^* such that*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0, \quad (3.2)$$

$$\|a_\varepsilon - a_0 - f(\varepsilon)\delta_a\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{V})} = o(f(\varepsilon)), \quad (3.3)$$

$$\|l_\varepsilon - l_0 - f(\varepsilon)\delta_l\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} = o(f(\varepsilon)), \quad (3.4)$$

where $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ (respectively $\mathcal{L}_2(\mathcal{V})$) denotes the space of continuous and semilinear (respectively sesquilinear) forms on \mathcal{V} .

Hypothesis 3.2 *There exists a constant $\alpha > 0$ such that*

$$\inf_{u \neq 0} \sup_{v \neq 0} \frac{|a_0(u, v)|}{\|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}} \geq \alpha.$$

We say that a_0 satisfies the inf-sup condition.

According to (3.3), there exists a constant $\beta > 0$ (independent of $\varepsilon \leq \varepsilon_0$) such that

$$\inf_{u \neq 0} \sup_{v \neq 0} \frac{|a_\varepsilon(u, v)|}{\|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}} \geq \beta \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

For $\varepsilon \geq 0$, we suppose that the following problem has one solution : find $u_\varepsilon \in \mathcal{V}$ such that

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3.5)$$

According to Hypothesis 3.2, this solution is unique. We have the following lemma.

Lemma 3.1 *If Hypotheses 3.1 and 3.2 are satisfied then*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}} = O(f(\varepsilon)).$$

Proof. It follows from Hypothesis 3.2 that there exists $v_\varepsilon \in \mathcal{V}, v_\varepsilon \neq 0$ such that

$$\beta \|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}} \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{V}} \leq |a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon)|,$$

which implies

$$\begin{aligned} \beta \|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}} \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{V}} &\leq |a_\varepsilon(u_0, v_\varepsilon) - l_\varepsilon(v_\varepsilon)| \\ &= |a_\varepsilon(u_0, v_\varepsilon) - (l_\varepsilon - l_0 - f(\varepsilon)\delta_l)(v_\varepsilon) - l_0(v_\varepsilon) - f(\varepsilon)\delta_l(v_\varepsilon)| \\ &= |(a_\varepsilon(u_0, v_\varepsilon) - a_0(u_0, v_\varepsilon)) - (l_\varepsilon - l_0 - f(\varepsilon)\delta_l)(v_\varepsilon) - f(\varepsilon)\delta_l(v_\varepsilon)| \\ &\leq |a_\varepsilon(u_0, v_\varepsilon) - a_0(u_0, v_\varepsilon) - f(\varepsilon)\delta_a(u_0, v_\varepsilon)| \\ &\quad + |l_\varepsilon(v_\varepsilon) - l_0(v_\varepsilon) - f(\varepsilon)\delta_l(v_\varepsilon)| + f(\varepsilon)(|\delta_a(u_0, v_\varepsilon)| + |\delta_l(v_\varepsilon)|). \end{aligned}$$

Using Hypothesis 3.1, we obtain

$$\beta \|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}} \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{V}} \leq (o(f(\varepsilon)) + f(\varepsilon)(\|\delta_a\|_{\mathcal{L}_2(\mathcal{V})}\|u_0\|_{\mathcal{V}} + \|\delta_l\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V})})) \|v_\varepsilon\|_{\mathcal{V}}.$$

□

Consider now a cost function $j(\varepsilon) = J(u_\varepsilon)$, where the functional J satisfies

$$J(u + h) = J(u) + \Re(L_u(h)) + o(\|h\|_{\mathcal{V}}) \quad \forall u, h \in \mathcal{V}. \quad (3.6)$$

Here, L_u is a linear and continuous form on \mathcal{V} . We suppose that the problem : find $p_0 \in \mathcal{V}$ such that

$$a_0(v, p_0) = -L_{u_0}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.7)$$

has a unique solution p_0 , called the adjoint state. For $\varepsilon \geq 0$, we define the lagrangian operator \mathcal{L}_ε by

$$\mathcal{L}_\varepsilon(u, v) = J(u) + a_\varepsilon(u, v) - l_\varepsilon(v) \quad \forall u, v \in \mathcal{V}.$$

The next theorem gives the asymptotic expansion of $j(\varepsilon)$.

Theorem 3.2 *If Hypotheses 3.1 and 3.2 are satisfied, then*

$$j(\varepsilon) - j(0) = f(\varepsilon)\Re(\delta_{\mathcal{L}}(u_0, p_0)) + o(f(\varepsilon)), \quad (3.8)$$

where u_0 is the solution to Equation (3.5) with $\varepsilon = 0$, p_0 is the adjoint state, solution to Problem (3.7) and

$$\delta_{\mathcal{L}}(u, v) = \delta_a(u, v) - \delta_l(v), \quad \forall u, v \in \mathcal{V}.$$

Proof. We have that

$$j(\varepsilon) = \mathcal{L}_\varepsilon(u_\varepsilon, v) \quad \forall \varepsilon \geq 0, \forall v \in \mathcal{V}.$$

Next, choosing $v = p_0$, we obtain

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) - j(0) &= \mathcal{L}_\varepsilon(u_\varepsilon, p_0) - \mathcal{L}_0(u_0, p_0) \\ &= J(u_\varepsilon) - J(u_0) + a_\varepsilon(u_\varepsilon, p_0) - a_0(u_0, p_0) + l_0(p_0) - l_\varepsilon(p_0) \\ &= J(u_\varepsilon) - J(u_0) + \Re(a_\varepsilon(u_\varepsilon, p_0) - a_0(u_0, p_0)) - \Re(l_\varepsilon(p_0) - l_0(p_0)) \\ &= J(u_\varepsilon) - J(u_0) + \Re(a_\varepsilon(u_\varepsilon, p_0) - a_0(u_\varepsilon, p_0) + a_0(u_\varepsilon - u_0, p_0)) \\ &\quad - \Re(l_\varepsilon(p_0) - l_0(p_0) - f(\varepsilon)\delta_l(p_0)) - f(\varepsilon)\Re(\delta_l(p_0)). \end{aligned}$$

Using (3.6), we have that

$$J(u_\varepsilon) - J(u_0) = \Re(L_{u_0}(u_\varepsilon - u_0)) + o(\|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}}).$$

Hence,

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) - j(0) &= \Re(a_\varepsilon(u_\varepsilon, p_0) - a_0(u_\varepsilon, p_0)) + \Re(a_0(u_\varepsilon - u_0, p_0) + L_{u_0}(u_\varepsilon - u_0)) \\ &\quad + o(\|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}}) - \Re(l_\varepsilon(p_0) - l_0(p_0) - f(\varepsilon)\delta_l(p_0)) - f(\varepsilon)\Re(\delta_l(p_0)). \end{aligned}$$

Using that p_0 is the adjoint solution, we obtain

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) - j(0) &= \Re(a_\varepsilon(u_\varepsilon, p_0) - a_0(u_\varepsilon, p_0)) + o(\|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}}) \\ &\quad - \Re(l_\varepsilon(p_0) - l_0(p_0) - f(\varepsilon)\delta_l(p_0)) - f(\varepsilon)\Re(\delta_l(p_0)) \\ &= \Re((a_\varepsilon - a_0)(u_0, p_0)) + \Re((a_\varepsilon - a_0)(u_\varepsilon - u_0, p_0)) + o(\|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}}) \\ &\quad - \Re(l_\varepsilon(p_0) - l_0(p_0) - f(\varepsilon)\delta_l(p_0)) - f(\varepsilon)\Re(\delta_l(p_0)). \end{aligned}$$

It follows from Hypothesis 3.1 that

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) - j(0) &= f(\varepsilon)\Re(\delta_a(u_0, p_0)) + o(f(\varepsilon)) + f(\varepsilon)\Re(\delta_a(u_\varepsilon - u_0, p_0)) \\ &\quad + o(f(\varepsilon))\|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}} + o(\|u_\varepsilon - u_0\|_{\mathcal{V}}) - f(\varepsilon)\Re(\delta_l(p_0)). \end{aligned}$$

Finally, from Lemma 3.1 and the hypothesis $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0$, we have

$$j(\varepsilon) = j(0) + f(\varepsilon)\Re(\delta_a(u_0, p_0) - \delta_l(p_0)) + o(f(\varepsilon)),$$

since δ_a is continuous by assumption. □

3.3 A wave guide problem

In this section, we study a problem of a wave guide as a component of a spatial antenna feeding system. Because the wave guide \mathcal{O} has a uniform thickness, $\mathcal{O} = \Omega \times]a, b[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and the electric field has a vertical polarization (normal to Ω), the 3D problem can be reduced to a 2D problem in Ω , called the H-plane model. We assume that Ω is a domain of \mathbb{R}^2 with a regular boundary $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_N$, $N \in \mathbb{N}^*$. We denote by u_Ω the normal component to Ω of the electric field. It is a solution to the Helmholtz problem :

$$\begin{cases} \Delta u_\Omega + k^2 u_\Omega &= 0 & \text{in } \Omega, \\ u_\Omega &= 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n u_\Omega - iku_\Omega &= h_j & \text{on } \Gamma_j, j = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (3.9)$$

where $\partial_n u_\Omega$ is the normal derivative of u_Ω , $k \in \{k \in \mathbb{C}^* / \Im(k) \geq 0\}$ and $h_j \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_j)'$ for all $j \in \{1, 2, \dots, N\}$. The first boundary condition means that Γ_0 is a perfect metallic surface. When $h_j = 0$, the last equation is an approximate absorbing boundary condition (the normal incident plane waves are completely absorbed). When $h_j \neq 0$, it is a transmission condition. We prove in Appendix 3.5.1 that Problem (3.9) has one and only one solution in the Hilbert space

$$\mathcal{V}_\Omega = \{u \in H^1(\Omega), u = 0 \text{ on } \Gamma_0\}. \quad (3.10)$$

Here and in the following, all the Sobolev spaces involve complex-valued functions.

For a given $x \in \Omega$, let us consider the perforated open set $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$, where x is a point of Ω , $B(x, \varepsilon)$ is the ball of center x and of radius ε (see Figure 3.1). We assume that $\varepsilon > 0$ is small enough, and we denote $\Sigma_\varepsilon = \partial B(x, \varepsilon)$. Our aim is to get

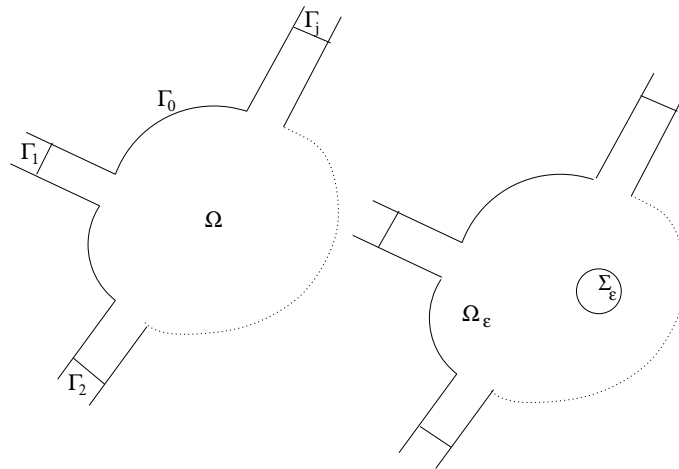


FIG. 3.1 – The initial domain and the same domain after the perforation.

the sensitivity analysis of u_{Ω_ε} , being the unique solution (see Appendix 3.5.1) to :

$$\begin{cases} \Delta u_{\Omega_\varepsilon} + k^2 u_{\Omega_\varepsilon} = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u_{\Omega_\varepsilon} = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ u_{\Omega_\varepsilon} = 0 & \text{on } \Sigma_\varepsilon, \\ \partial_n u_{\Omega_\varepsilon} - iku_{\Omega_\varepsilon} = h_j & \text{on } \Gamma_j, j = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (3.11)$$

with respect to ε at $\varepsilon = 0$. The solution of Problem (3.11) is defined on the variable open set Ω_ε , thus it belongs to a functional space which depends on ε . Hence, if we want to derive the asymptotic expansion of a function of the form

$$j(\varepsilon) = J(u_{\Omega_\varepsilon}), \quad (3.12)$$

we cannot apply directly the tools of Section 3.2, which require a fixed functional space. In classical shape optimization, this requirement can be satisfied with the help of a domain parameterization technique [13, 21, 18]. This technique involves a fixed domain and a bi-Lipshitz map between this domain and the modified one. In the topology optimization context, such a map does not exist between Ω and Ω_ε . However, a functional space independent of ε can be constructed by using a domain truncation technique.

3.3.1 The domain truncation

Let $R > \varepsilon$ be such that the ball $B(x, R)$ is included in Ω . The boundary of $B(x, R)$ is denoted by Σ_R . The truncated domain $\Omega \setminus \overline{B(x, R)}$ is denoted by Ω_R and D_ε denotes the corona $B(x, R) \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$ (see Figure 3.2).

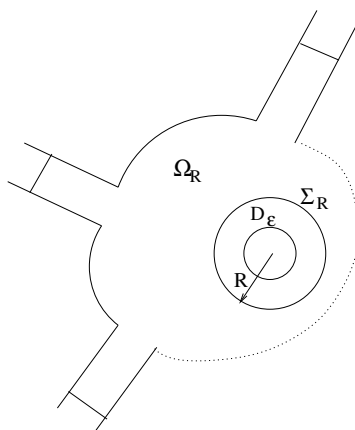


FIG. 3.2 – The truncated domain.

For a $\Psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$, we consider u_Ψ^ε the solution to the problem

$$\begin{cases} \Delta u_\Psi^\varepsilon + k^2 u_\Psi^\varepsilon = 0 & \text{in } D_\varepsilon, \\ u_\Psi^\varepsilon = \Psi & \text{on } \Sigma_R, \\ u_\Psi^\varepsilon = 0 & \text{on } \Sigma_\varepsilon, \end{cases} \quad (3.13)$$

and the *Dirichlet-to-Neumann* operator

$$\begin{aligned} T^\varepsilon : H^{1/2}(\Sigma_R) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Sigma_R) \\ \Psi &\longmapsto T^\varepsilon \Psi = \nabla u_\Psi^\varepsilon \cdot n|_{\Sigma_R}, \end{aligned}$$

where $n|_{\Sigma_R}$ denotes the outward normal to the boundary Σ_R . Using the Poincaré inequality, we obtain that, for $\varepsilon < R < (\sqrt{2}|k|)^{-1}$, the problem (3.13) is coercive. Hence it has one and only one solution.

We consider the truncated problem : find u_ε such that

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon + k^2 u_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_R, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n u_\varepsilon + T^\varepsilon u_\varepsilon = 0 & \text{on } \Sigma_R, \\ \partial_n u_\varepsilon - ik u_\varepsilon = h_j & \text{on } \Gamma_j, j = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.14)$$

The variational formulation associated to Problem (3.14) is the following : find $u_\varepsilon \in \mathcal{V}_R$ such that

$$a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_R, \quad (3.15)$$

where the functional space \mathcal{V}_R , the sesquilinear form a_ε , and the semilinear form l are defined by

$$\mathcal{V}_R = \{u \in H^1(\Omega_R), u = 0 \text{ on } \Gamma_0\}, \quad (3.16)$$

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega_R} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx - k^2 \int_{\Omega_R} u \overline{v} \, dx + \int_{\Sigma_R} (T^\varepsilon u) \overline{v} \, d\gamma(x) \quad (3.17)$$

$$-ik \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u \overline{v} \, d\gamma(x), \quad (3.18)$$

$$l(v) = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} h_j \overline{v} \, d\gamma(x). \quad (3.19)$$

Here, $\nabla u \cdot \overline{\nabla v} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i}$ and $d\gamma(x)$ is the Lebesgue measure on the boundary. The following result is standard in PDE theory.

Proposition 3.3 *The problem (3.14) has one and only one solution in \mathcal{V}_R which is the restriction to Ω_R of the solution to (3.11).*

Proof. Existence : Applying the definition of T^ε , we prove that the restriction to Ω_R of the solution to (3.11) is a solution to (3.14).

Uniqueness : Any solution u to Problem (3.14) can be extended in Ω_ε to the solution to Problem (3.11) : we use the solution u_Ψ^ε to (3.13) with $\Psi = u|_{\Sigma_R}$. \square

We have now at our disposal the fixed Hilbert space \mathcal{V}_R required by Section 3.2. We assume that the function J is defined in a neighbor part of Γ . Then we have

$$j(\varepsilon) = J(u_{\Omega_\varepsilon}) = J(u_\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \geq 0. \quad (3.20)$$

3.3.2 Variation of the sesquilinear form

The variation of the sesquilinear form $a_\varepsilon - a_0$ reads

$$a_\varepsilon(u, v) - a_0(u, v) = \int_{\Sigma_R} ((T^\varepsilon - T^0)u) \bar{v} d\gamma(x). \quad (3.21)$$

Hence, the problem reduces to the computation of $(T^\varepsilon - T^0)\Psi$ for $\Psi = u|_{\Sigma_R}$. We have the following proposition.

Proposition 3.4 *The solution u_ψ^ε to Problem (3.13) and the operator T^ε are given by the explicit expressions :*

$$u_\psi^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(kr)Y_n(k\varepsilon) - J_n(k\varepsilon)Y_n(kr)}{J_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \psi_n e^{in\theta}$$

and

$$T^\varepsilon \psi = k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J'_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - J_n(k\varepsilon)Y'_n(kR)}{J_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \psi_n e^{in\theta}, \quad (3.22)$$

where (r, θ) are the polar coordinates in \mathbb{R}^2 , (Ψ_n) are the Fourier coefficients of Ψ , (J_n) and (Y_n) are respectively the Bessel functions of the first and the second kind.

Proof. We have in polar coordinates :

$$u_\psi^\varepsilon(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(r) e^{in\theta},$$

where $c_n(r)$ satisfies the differential equation :

$$\frac{d^2 c_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dc_n}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) c_n(r) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

and thus c_n is a linear combination of J_n and Y_n Bessel functions :

$$c_n(r) = a_n J_n(kr) + b_n Y_n(kr) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Using the boundary conditions, we obtain

$$a_n = \frac{Y_n(k\varepsilon)}{J_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \psi_n, \quad b_n = \frac{-J_n(k\varepsilon)}{J_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \psi_n.$$

□

In particular, for $\varepsilon = 0$ we have :

Proposition 3.5 *The solution u_ψ^0 and the operator T^0 are given by the explicit expressions*

$$u_\psi^0(r, \theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(kr)}{J_n(kR)} \psi_n e^{in\theta}$$

and

$$T^0 \psi = k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} \psi_n e^{in\theta}, \quad (3.23)$$

where u_ψ^0 is the solution to (3.13) for $\varepsilon = 0$.

For $\Psi \in H^s(\Sigma_R)$, let

$$\|\psi\|_{s,\Sigma_R}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\psi_n|^2 (1 + |n|)^{2s} \quad (3.24)$$

be the norm of Ψ in this space. The so defined norm is equivalent to the usual norm of $H^s(\Sigma_R)$. We introduce the operator :

$$\begin{aligned} \delta_T : H^{1/2}(\Sigma_R) &\longrightarrow H^{-1/2}(\Sigma_R) \\ \Psi &\longmapsto \delta_T \Psi = \frac{1}{RJ_0^2(kR)} \Psi_0. \end{aligned}$$

We have the following lemma.

Lemma 3.6 *We have that*

$$\|T^\varepsilon - T^0 - \frac{-1}{\log(\varepsilon)} \delta_T\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Sigma_R); H^{-1/2}(\Sigma_R))} = o\left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\right).$$

Proof. Let $\Psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R)$. Using the series (3.22) and (3.23), we obtain

$$\begin{aligned} (T^\varepsilon - T^0)\psi &= k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J'_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - J_n(k\varepsilon)Y'_n(kR)}{J_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \psi_n e^{in\theta} - k \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} \psi_n e^{in\theta} \\ &= k \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{J'_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - J_n(k\varepsilon)Y'_n(kR)}{J_n(kR)Y_n(k\varepsilon) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \psi_n e^{in\theta} - k \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} \psi_n e^{in\theta} \\ &\quad - k \frac{Y'_0(kR)J_0(kR) - Y_0(kR)J'_0(kR)}{J_0^2(kR)} \frac{J_0(k\varepsilon)J_0(kR)}{J_0(kR)Y_0(k\varepsilon) - Y_0(kR)J_0(k\varepsilon)} \psi_0. \end{aligned}$$

We have that [1]

$$\begin{aligned} \frac{Y'_0(kR)J_0(kR) - Y_0(kR)J'_0(kR)}{J_0^2(kR)} &= \frac{W\{J_0(kR), Y_0(kR)\}}{J_0^2(kR)} \\ &= \frac{2}{\pi kR} \frac{1}{J_0^2(kR)}, \end{aligned}$$

where W is the Wronskian. Then

$$\begin{aligned} (T^\varepsilon - T^0)\psi &= k \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{J_n(k\varepsilon)Y_n(kR)}{Y_n(k\varepsilon)J_n(kR) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \left(\frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} - \frac{Y'_n(kR)}{Y_n(kR)} \right) \psi_n e^{in\theta} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \frac{J_0(k\varepsilon)J_0(kR)}{J_0(kR)Y_0(k\varepsilon) - Y_0(kR)J_0(k\varepsilon)} \frac{1}{RJ_0^2(kR)} \psi_0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

We have the following formula [1] :

$$Y_0(k\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \left(\log\left(\frac{k\varepsilon}{2}\right) + \gamma \right) J_0(k\varepsilon) + \varepsilon \alpha(\varepsilon), \quad (3.26)$$

where γ denotes Euler's constant and $\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. We insert (3.26) into (3.25) :

$$(T^\varepsilon - T^0)\psi = \varepsilon R_\varepsilon \Psi + \frac{-1}{\log(\varepsilon)} \left(1 + \frac{M}{\log(\varepsilon)} + \varepsilon \theta(\varepsilon) \right)^{-1} \delta_T \Psi,$$

where M is a constant independent of ε , $\theta(\varepsilon) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$ and

$$R_\varepsilon \psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{k}{\varepsilon} \frac{J_n(k\varepsilon)Y_n(kR)}{Y_n(k\varepsilon)J_n(kR) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \left(\frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} - \frac{Y'_n(kR)}{Y_n(kR)} \right) \psi_n e^{in\theta}.$$

Then

$$\left(T^\varepsilon - T^0 - \frac{-1}{\log(\varepsilon)} \delta_T \right) \psi = \varepsilon R_\varepsilon \psi + O(1) \left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)} \right)^2 \frac{1}{R J_0^2(kR)} \psi_0.$$

Using (3.24), we have

$$\begin{aligned} \| R_\varepsilon \psi \|_{-\frac{1}{2}; \Sigma_R}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|k|^2}{\varepsilon^2} \left| \frac{J_n(k\varepsilon)Y_n(kR)}{Y_n(k\varepsilon)J_n(kR) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \right|^2 \\ &\quad \cdot \left| \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)(1+|n|)} - \frac{Y'_n(kR)}{Y_n(kR)(1+|n|)} \right|^2 (1+|n|) |\psi_n|^2. \end{aligned}$$

Let us prove that there exists a constant $c > 0$ (independent of Ψ and ε) such that for all $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < R$,

$$\| R_\varepsilon \psi \|_{-\frac{1}{2}; \Sigma_R} \leq c \| \psi \|_{\frac{1}{2}; \Sigma_R}.$$

We have [1]

$$\frac{1}{1+|n|} \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} = -\frac{1}{1+|n|} \frac{J_{n+1}(kR)}{J_n(kR)} + \frac{n}{1+|n|} \frac{1}{kR}$$

and for $n \rightarrow \infty$

$$J_n(z) \sim (2\pi n)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{ez}{2n} \right)^n.$$

Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+|n|} \frac{J_{n+1}(kR)}{J_n(kR)} = 0$$

and

$$\left| \frac{1}{1+|n|} \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)} \right| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Here and in what follows, c is a positive constant independent of the data (*e.g.*, of ε and n). Similarly, we have

$$\left| \frac{1}{1+|n|} \frac{Y'_n(kR)}{Y_n(kR)} \right| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

Hence,

$$\left| \frac{J'_n(kR)}{J_n(kR)(1+|n|)} - \frac{Y'_n(kR)}{Y_n(kR)(1+|n|)} \right| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*.$$

We denote

$$f_n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{J_n(k\varepsilon)Y_n(kR)}{Y_n(k\varepsilon)J_n(kR) - Y_n(kR)J_n(k\varepsilon)} \right|.$$

We have also

$$f_n(\varepsilon) = \left| \frac{\varepsilon J_n(kR)Y_n(k\varepsilon)}{J_n(k\varepsilon)Y_n(kR)} - \varepsilon \right|^{-1}.$$

We show in Appendix 3.5.3 that there exist n_0 and ε_0 such that

$$\left| \varepsilon \frac{J_n(kR)}{J_n(k\varepsilon)} \right| \geq c \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^{n-1} \quad \forall n \geq n_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \quad (3.27)$$

and

$$\left| \frac{Y_n(k\varepsilon)}{Y_n(kR)} \right| \geq c \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^n \quad \forall n \geq n_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (3.28)$$

Using (3.27) and (3.28), we obtain

$$\left| \frac{\varepsilon Y_n(k\varepsilon)J_n(kR)}{J_n(k\varepsilon)Y_n(kR)} \right| \geq c \quad \forall n \geq n_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

and

$$f_n(\varepsilon) \leq c \quad \forall n \geq n_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

For $p \in \{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$, we have $f_p(\varepsilon) \rightarrow 0$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. Then

$$f_n(\varepsilon) \leq c \quad \forall n \in \mathbb{Z}^*, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Hence

$$\|R_\varepsilon \psi\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma_R} \leq c \|\psi\|_{\frac{1}{2}, \Sigma_R} \quad \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma_R).$$

This completes the proof. □

From this lemma we obtain

Proposition 3.7 *Let δ_a be the sesquilinear and continuous form defined on \mathcal{V}_R by*

$$\delta_a(u, v) = \frac{u^{mean} \overline{v^{mean}}}{J_0(kR) J_0(kR)},$$

where u^{mean} and v^{mean} denote respectively the mean values of u and v on Σ_R . We have

$$\left| a_\varepsilon(u, p) - a_0(u, p) - \frac{-2\pi}{\log(\varepsilon)} \delta_a(u, p) \right| = o\left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\right) \|u\|_{\mathcal{V}_R} \|p\|_{\mathcal{V}_R} \quad \forall u, p \in \mathcal{V}_R.$$

3.3.3 The asymptotic expansion

We prove in Appendix 3.5.2 that the sesquilinear form a_0 satisfies Hypothesis 3.2 (inf-sup condition).

The adjoint problem is : find $p_\Omega \in \mathcal{V}_\Omega$ such that

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \overline{\nabla p_\Omega} - k^2 v \overline{p_\Omega}) dx - ik \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v \overline{p_\Omega} d\gamma(x) = -L_{u_\Omega}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\Omega. \quad (3.29)$$

This problem has one and only one solution (see Appendix 3.5.1). If $L_{u_\Omega} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_m)'$, $m \in \{1, 2, \dots, N\}$, the strong formulation of Problem (3.29) is :

$$\begin{cases} \Delta p_\Omega + \bar{k}^2 p_\Omega = 0 & \text{in } \Omega, \\ p_\Omega = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n p_\Omega + i\bar{k} p_\Omega = -L_{u_\Omega} & \text{on } \Gamma_m, \\ \partial_n p_\Omega + i\bar{k} p_\Omega = 0 & \text{on } \Gamma_j, j \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{m\}. \end{cases} \quad (3.30)$$

Hence, all the assumptions of Section 3.2 are satisfied and we can apply the adjoint method. Then we have the following theorem.

Theorem 3.8 *The function j has the following asymptotic expansion*

$$j(\varepsilon) - j(0) = \frac{-2\pi}{\log(\varepsilon)} \Re(u_\Omega(x) \overline{p_\Omega}(x)) + o\left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\right).$$

Proof. Using Theorem 3.2, we obtain

$$j(\varepsilon) - j(0) = \frac{-2\pi}{\log(\varepsilon)} \Re(\delta_a(u_0, p_0)) + o\left(\frac{-1}{\log(\varepsilon)}\right),$$

where u_0 is the solution to (3.15) for $\varepsilon = 0$ and p_0 is the solution to the adjoint problem

$$a_0(v, p_0) = -L_{u_0}(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_R. \quad (3.31)$$

As observed in Proposition 3.3, u_0 is the restriction to Ω_R of u_Ω . Let us prove that the same property holds for p_0 and p_Ω . For $v \in \mathcal{V}_\Omega$, we denote by p_R and v_R the restriction of p_Ω and v to Ω_R . On the one hand, we have

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \overline{\nabla p_\Omega} - k^2 v \overline{p_\Omega}) dx - ik \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v \overline{p_\Omega} d\gamma(x) \\ &= \int_{\Omega_R} (\nabla v_R \cdot \overline{\nabla p_R} - k^2 v_R \overline{p_R}) dx - ik \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v_R \overline{p_R} d\gamma(x) + \int_{D_0} (\nabla v \cdot \overline{\nabla p_\Omega} - k^2 v \overline{p_\Omega}) dx \\ &= \int_{\Omega_R} (\nabla v_R \cdot \overline{\nabla p_R} - k^2 v_R \overline{p_R}) dx - ik \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} v_R \overline{p_R} d\gamma(x) + \int_{\Sigma_R} (T^0 v_R) \overline{p_R} d\gamma(x) \\ &= a_0(v_R, p_R). \end{aligned} \quad (3.32)$$

On the other hand, due to the fact that J is defined in a neighbor part of Γ , we have that $J(u) = J(u_R)$ for all $u \in \mathcal{V}_\Omega$. Hence

$$L_{u_\Omega}(v) = L_{u_0}(v_R). \quad (3.33)$$

Then, gathering (3.32), (3.29) and (3.33), we obtain

$$a_0(v_R, p_R) = -L_{u_0}(v_R) \quad \forall v_R \in \mathcal{V}_R,$$

which proves that p_R is the solution to (3.31). Then p_0 is the restriction to Ω_R of p_Ω . It remains to prove that $\delta_a(u_\Omega|_{\Omega_R}, p_\Omega|_{\Omega_R}) = u_\Omega(x) \cdot \overline{p_\Omega(x)}$. Using that u_Ω is the solution to Helmholtz equation in the ball $B(x, R)$, we obtain

$$u_\Omega(x) = \frac{u_\Omega|_{\Sigma_R}^{mean}}{J_0(kR)}.$$

Similarly, we have

$$\overline{p_\Omega}(x) = \frac{\overline{p_\Omega|_{\Sigma_R}^{mean}}}{J_0(kR)}.$$

Hence

$$\begin{aligned} \delta_a(u_0, p_0) &= \delta_a(u_\Omega|_{\Omega_R}, p_\Omega|_{\Omega_R}) \\ &= u_\Omega(x) \overline{p_\Omega(x)}. \end{aligned}$$

This completes the proof. □

Then the topological gradient is

$$g = \Re(u_\Omega \overline{p_\Omega}).$$

3.4 Numerical results

3.4.1 T-shaped waveguide

We use the topological gradient to design a H-plane T-shaped waveguide. The geometric constraints are shown on Figure 3.3.(a). The input Γ_1 is excited by the TE10 mode (see the second boundary condition of (3.34)) : the excitation is given by

$$u_e(y) = \cos\left(\frac{\pi y}{d}\right) \forall y \in \Gamma_1.$$

We follow the two ideas [16] :

- the initial guess is the free space
- instead of minimizing the reflected energy, we maximize the transmitted energy on Γ_2 and Γ_3 .

At the beginning, only the input and output channels have metallic boundaries. In order to use the finite element method, the design domain is delimited by a fictitious boundary Γ_4 on which an absorbing condition is imposed (see Figure 3.3.(b)). The problem is modeled as follows

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n u - ik' u = \partial_n u_e - ik' u_e & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n u - ik' u = 0 & \text{on } \Gamma_2, \Gamma_3, \\ \partial_n u - ik u = 0 & \text{on } \Gamma_4, \end{cases} \quad (3.34)$$

where $k^2 = k'^2 + \frac{\pi^2}{d^2}$, d being the length of Γ_1 . The perfect conduction on the metallic boundary leads to the first boundary condition $u = 0$ on Γ_0 . The third boundary condition prevent reflections on Γ_2, Γ_3 . The last equation is an approximate absorbing boundary condition. Here and in the following, we take $k = 10$.

The cost function to maximize is

$$J(u) = |S_{12}(u)|^2 + |S_{13}(u)|^2,$$

where $S_{1j}(u)$ is given by

$$S_{1j}(u) = \int_{\Gamma_j} u|_{\Gamma_j} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) dx, \quad j \in \{2, 3\}.$$

The adjoint state is solution to

$$\begin{cases} \Delta \bar{p} + k^2 \bar{p} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \bar{p} = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n \bar{p} - ik' \bar{p} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \partial_n \bar{p} - ik' \bar{p} = -2 \overline{S_{12}(u)} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) & \text{on } \Gamma_2, \\ \partial_n \bar{p} - ik' \bar{p} = -2 \overline{S_{13}(u)} \cos\left(\frac{\pi x}{d}\right) & \text{on } \Gamma_3, \\ \partial_n \bar{p} - ik \bar{p} = 0 & \text{on } \Gamma_4. \end{cases} \quad (3.35)$$

Then the topological gradient is $g = \Re(u\bar{p})$ (see Figure 3.4.(b)). We are interested in the relative loss of energy

$$P(u) = \frac{E_e - (E_2 + E_3)(u)}{E_e},$$

where E_e is the entering energy and $E_j(u)$ is the outgoing energy through Γ_j , $j \in \{2, 3\}$.

We present here the topological optimization procedure. The underlying idea is the following : in the ℓ -th step of the process, if \bar{x} is such that the topological gradient is higher than a certain value t_ℓ , we insert at this point a Dirichlet node (metal). The constant t_ℓ is chosen by the user, which allows him to take into account other constraints, as for example the feasibility. The process is stopped when the topological gradient is everywhere negative in the design domain or when the shape suits the designer. The algorithm is the following :

- Initialization : choose the initial domain Ω_0 , and set $\ell = 0$. The domain Ω_0 is meshed and it is identified with the set of the nodes : $\Omega_0 = \{x_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. The grid is fixed during the process.

- Repeat
 1. compute u_ℓ, p_ℓ the direct and adjoint solutions in the domain Ω_ℓ ,
 2. compute the topological gradient $g_\ell = \Re(u_\ell \overline{p_\ell})$,
 3. set $\Omega_{\ell+1} = \Omega_\ell \setminus \{x_k, g_\ell(x_k) \geq t_{\ell+1}\}$,
 4. $\ell \leftarrow \ell + 1$.

Figure 3.4 shows the isovalues of $|u|$ and the topological gradient for the initial geometry. In this case, 94.4% of the energy is lost. After two iterations, the loss is reduced to 2.02% (see Figure 3.5) and the topological gradient is everywhere negative. The last step consists in smoothing the boundary of the domain by inserting some metal where $|u|$ is close to zero. The loss of energy of this waveguide is equal to 1.5% (see Figure 3.6). The convergence history is given by Figure 3.7.

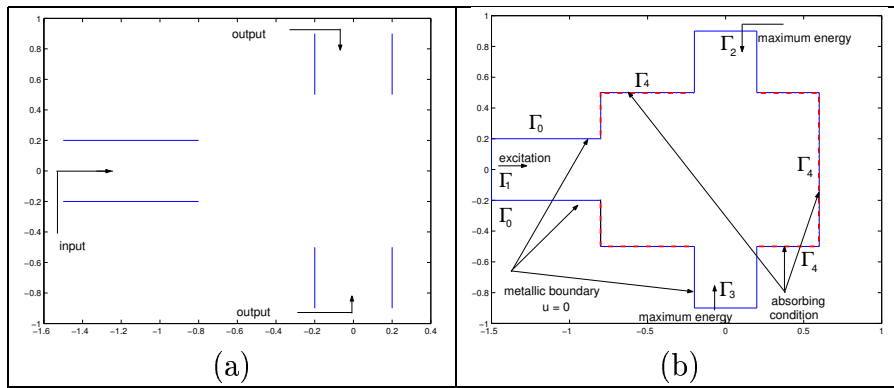


FIG. 3.3 – The initial geometry (a) and the design domain (b).

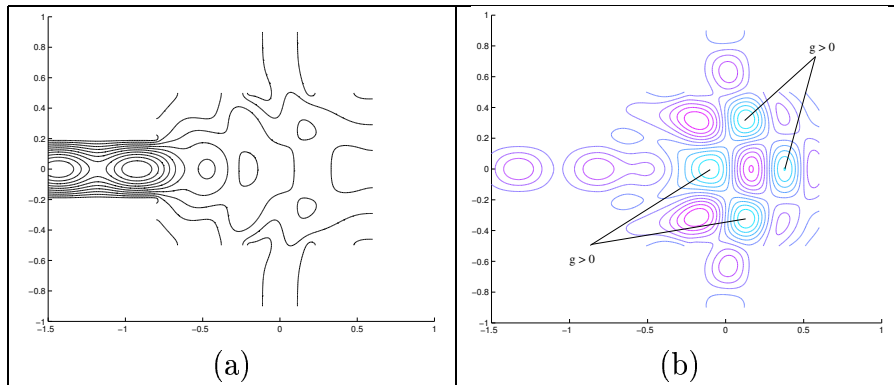


FIG. 3.4 – Modulus of the electric field (a) and topological gradient (b).

3.4.2 L-shaped waveguide

Here, we use the topological gradient like a decision help system to build a junction between two rectangular waveguides. The initial geometry and the design domain are

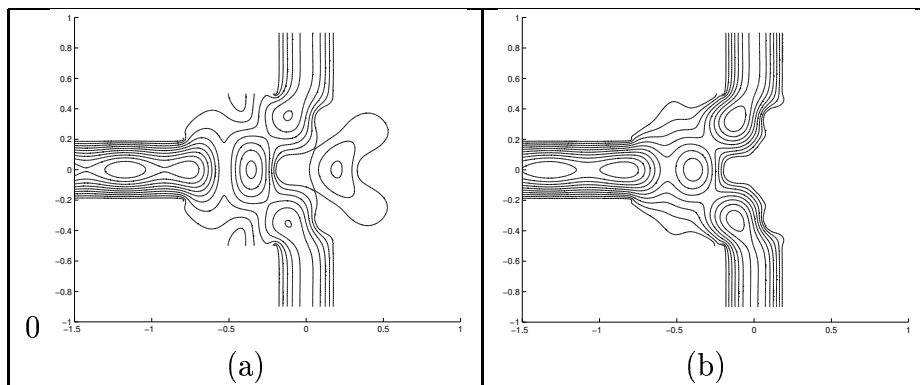


FIG. 3.5 – Modulus of the electric fields obtained after a first iteration (a) and after two iterations (b).

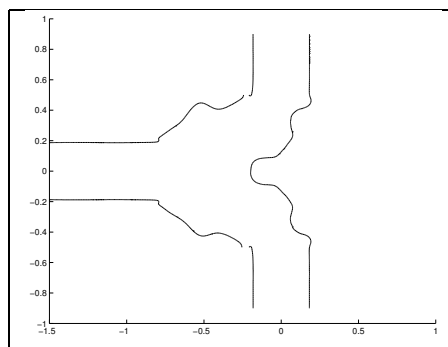


FIG. 3.6 – Final geometry.

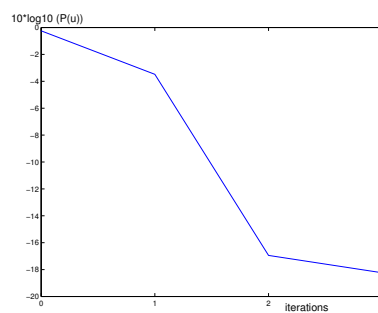


FIG. 3.7 – Convergence history.

given by Figure 3.8. The cost function to maximize is

$$J(u) = |S_{12}(u)|^2.$$

Figure 3.9.(a) shows the isovalues of $|u|$ for the initial geometry. In this case, 95.43% of the energy is lost. We observe that the topological gradient is high on a quarter of circle where we decide to put metal (see Figure 3.9.(b)). The loss of energy of the obtained waveguide is now equal to 0.34% (see Figure 3.10).

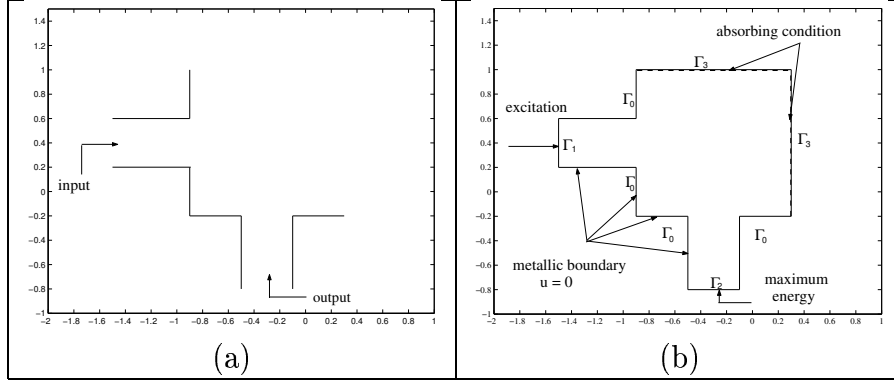


FIG. 3.8 – The initial geometry (a) and the design domain (b).

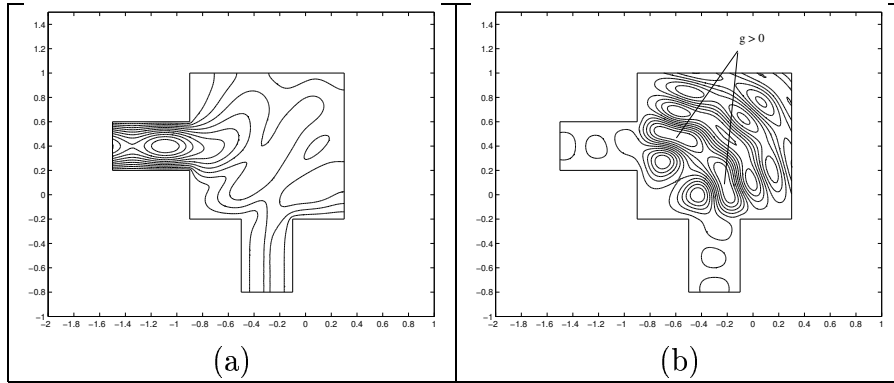


FIG. 3.9 – Modulus of the electric field (a) and topological gradient (b).

3.4.3 U-shaped waveguide

Here, the initial guess is a metallic cavity. The geometry of the waveguide is shown in Figure 3.11. The cost function to maximize is

$$J(u) = |S_{12}(u)|^2.$$

Figure 3.12.(a) shows the isovalues of $|u|$ for the initial geometry. In this case, 88.45% of the energy is reflected. There are three local maxima of the topological gradient (see Figure 3.12.(b)). At each local maxima, we introduce a pointwise Dirichlet condition

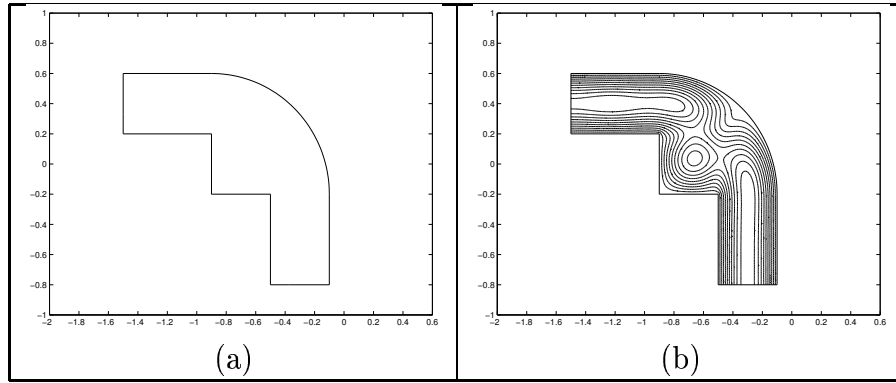


FIG. 3.10 – Final geometry (a) and modulus of the electric field (b).

(a metallic plot). The new energy distribution is shown in Figure 3.13.(a). The loss of energy is now equal to 39.19%. A new analysis is performed : after the introduction of another metallic plot, we obtain the design of Figure 3.13.(b). The objective is fulfilled, the loss of energy is equal to 0.7%. For feasibility reasons, we decide not to insert additional plots.

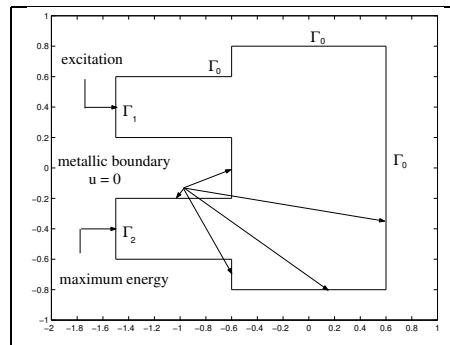


FIG. 3.11 – Geometry of the initial guide.

3.5 Appendix

3.5.1 Existence and uniqueness of solution

Here we establish the existence and uniqueness of solution to problem (3.9). Replacing Ω with Ω_ε , the argumentation would be the same for Problem (3.11). Without any loss of generality, we suppose here that $N = 1$. The variational form of problem (3.9) is : find $u \in \mathcal{V}_\Omega$ satisfying

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\Omega, \quad (3.36)$$

where the functional space \mathcal{V}_Ω , the sesquilinear form a and the semilinear form l are defined by

$$\mathcal{V}_\Omega = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ on } \Gamma_0\},$$

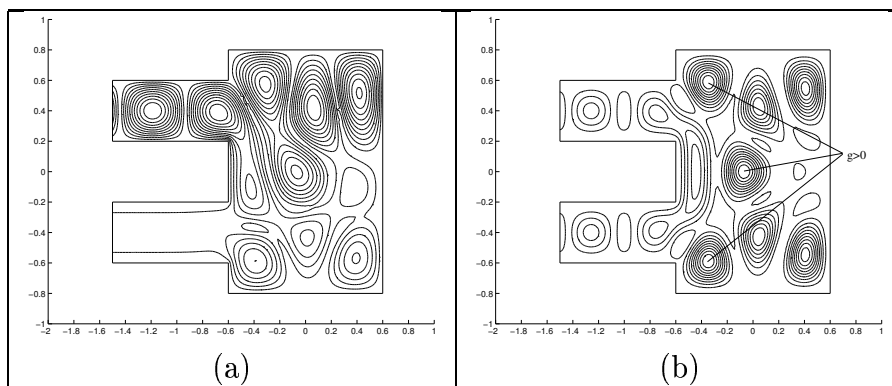


FIG. 3.12 – Modulus of the electric field (a) and topological gradient (b).

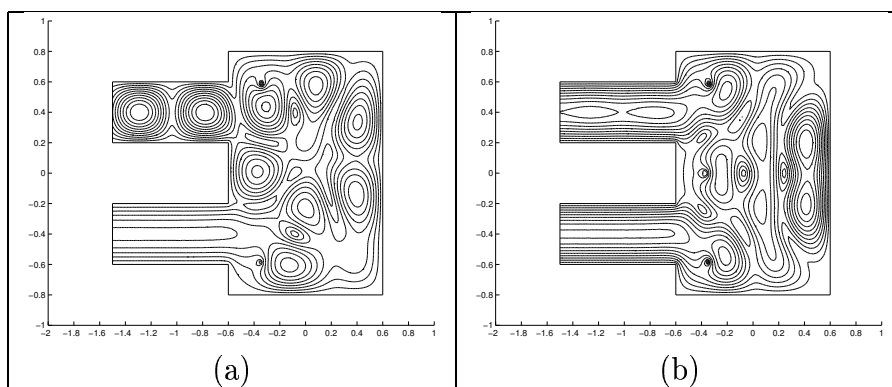


FIG. 3.13 – Modulus of the electric fields obtained after a first iteration (a) and after two iterations (b).

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - k^2 u \bar{v}) dx - ik \int_{\Gamma_1} u \bar{v} d\gamma(x), \\ l(v) &= \int_{\Gamma_1} g \bar{v} d\gamma(x). \end{aligned}$$

We split a in the following form :

$$a(u, v) = b(u, v) + c(u, v), \quad (3.37)$$

where b and c are defined by

$$b(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + u \bar{v}) dx, \quad (3.38)$$

$$c(u, v) = -(1 + k^2) \int_{\Omega} u \bar{v} dx - ik \int_{\Gamma_1} u \bar{v} d\gamma(x). \quad (3.39)$$

We recall the following result which is a consequence of the Lax-Milgram theorem.

Lemma 3.9 *For all $f \in \mathcal{V}'_{\Omega}$, there exists a unique $u_f \in \mathcal{V}_{\Omega}$ such that*

$$b(u_f, v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}'_{\Omega}, \mathcal{V}_{\Omega}}.$$

The operator $f \mapsto u_f$ is continuous from \mathcal{V}'_{Ω} to \mathcal{V}_{Ω} .

We define

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \mathcal{V}_{\Omega} &\longrightarrow \mathcal{V}_{\Omega} \\ u &\longmapsto \mathcal{C}u \end{aligned}$$

such that

$$b(\mathcal{C}u, v) + c(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_{\Omega}. \quad (3.40)$$

We have the following lemma.

Lemma 3.10 *The operator \mathcal{C} is compact.*

Proof. By Lemma 3.9, it suffices to prove that the operator

$$u \longmapsto c(u, \cdot)$$

from \mathcal{V}_{Ω} to \mathcal{V}'_{Ω} is compact. Let (u_i) be a sequence bounded in \mathcal{V}_{Ω} . The following imbeddings : $\mathcal{V}_{\Omega} \rightarrow L^2(\Omega)$ and $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_1) \rightarrow L^2(\Gamma_1)$ are compact, then there exists a subsequence always denoted by (u_i) such that

$$u_i \rightarrow w_1 \text{ in } L^2(\Omega)$$

and

$$\gamma_0 u_i \rightarrow w_2 \text{ in } L^2(\Gamma_1).$$

Then,

$$c(u_i, \cdot) \rightarrow l^{w_2}_{w_1} \text{ in } \mathcal{V}'_{\Omega},$$

where $l_{w_1}^{w_2}$ is defined by

$$\langle l_{w_1}^{w_2}, v \rangle_{\mathcal{V}'_\Omega, \mathcal{V}_\Omega} = -(1 + k^2) \int_\Omega w_1 \bar{v} \, dx - ik \int_{\Gamma_1} w_2 \bar{v} \, d\gamma(x) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\Omega.$$

Hence the operator \mathcal{C} is compact. \square

Using (3.40), Problem (3.36) can be written as follows : find $u \in \mathcal{V}_\Omega$ such that

$$b((I - \mathcal{C})u, v) = l(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\Omega. \quad (3.41)$$

We have the following lemma.

Lemma 3.11 *For $k \in \{k \in \mathbb{C}^* / \Im(k) \geq 0\}$, the following problem : find $u \in \mathcal{V}_\Omega$ such that*

$$a(u, v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_\Omega, \quad (3.42)$$

has no non-trivial solution.

Proof. Let u be a solution to Problem (3.42). For $v = u$, we have

$$a(u, u) = 0.$$

Then,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - k^2 \int_\Omega |u|^2 \, dx - ik \int_{\Gamma_1} |u|^2 \, d\gamma(x) = 0. \quad (3.43)$$

By writing $k = k_1 + ik_2$, where $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ and using (3.43), we obtain

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - (k_1^2 - k_2^2) \int_\Omega |u|^2 \, dx + k_2 \int_{\Gamma_1} |u|^2 \, d\gamma(x) = 0, \quad (3.44)$$

and

$$k_1 \int_{\Gamma_1} |u|^2 \, d\gamma(x) + 2k_1 k_2 \int_\Omega |u|^2 \, dx = 0. \quad (3.45)$$

Two cases can arise :

- first case : $k_2 > 0$. If $k_1 = 0$, using (3.44) we obtain

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + k_2^2 \int_\Omega |u|^2 \, dx + k_2 \int_{\Gamma_1} |u|^2 \, d\gamma(x) = 0.$$

Then, $u = 0$ in Ω . If $k_1 \neq 0$, using (3.45) we obtain

$$\int_{\Gamma_1} |u|^2 \, d\gamma(x) + 2k_2 \int_\Omega |u|^2 \, dx = 0.$$

Then, $u = 0$ in Ω .

- second case : $k_2 = 0$ and $k_1 \neq 0$. Using (3.45), we obtain

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1.$$

Let $\tilde{\Omega}$ be a regular domain containing Ω and so that $\Gamma_0 \subset \partial\tilde{\Omega}$. Extending u by zero in $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$. We obtain a function \tilde{u} that satisfies

$$\Delta \tilde{u} + k^2 \tilde{u} = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\tilde{\Omega}).$$

This extension is analytic, it is equal to zero in an open subset of a connected domain, thus $\tilde{u} = 0$ in $\tilde{\Omega}$.

This completes the proof. \square

By Lemma 3.11, Lemma 3.10 and using the Fredholm alternative, we obtain the following result.

Theorem 3.12 *For $k \in \{k \in \mathbb{C}^* / \Im(k) \geq 0\}$, problem (3.36) has one and only one solution.*

3.5.2 The inf-sup condition

Our aim is to prove that the sesquilinear form a_0 defined by (3.17) for $\varepsilon = 0$, satisfies the inf-sup condition (see Hypothesis 3.2). We have the following lemma.

Lemma 3.13 *The sesquilinear form a defined in (3.36) satisfies the inf-sup condition.*

Proof. Let $u \in \mathcal{V}_\Omega$. We set $v = (I - \mathcal{C})u$, where \mathcal{C} is the operator defined by (3.40). According to (3.40), we have

$$\begin{aligned} a(u, v) &= b(v, v) \\ &= \|(I - \mathcal{C})u\|_{\mathcal{V}_\Omega} \|v\|_{\mathcal{V}_\Omega} \\ &\geq \alpha \|u\|_{\mathcal{V}_\Omega} \|v\|_{\mathcal{V}_\Omega}, \end{aligned}$$

where $\alpha = \|(I - \mathcal{C})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{V}_\Omega, \mathcal{V}_\Omega)}^{-1}$. Thus the sesquilinear form a satisfies the inf-sup condition. \square

We have the following result.

Proposition 3.14 *The sesquilinear form a_0 satisfies the inf-sup condition.*

Proof. We have

$$a_0(u, v) = \int_{\Omega_R} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - k^2 u \overline{v}) dx + \int_{\Sigma_R} (T^0 u) \overline{v} d\gamma(x) - ik \int_{\Gamma_1} u \overline{v} d\gamma(x) \quad \forall u, v \in \mathcal{V}_R.$$

For all $u \in \mathcal{V}_R$ we set

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{in } \Omega_R \\ u_\psi^0 & \text{in } B(x, R), \end{cases}$$

where $\psi = u|_{\Sigma_R}$ and u_ψ^0 is the solution to

$$\begin{cases} \Delta u_\psi^0 + k^2 u_\psi^0 = 0 & \text{in } B(x, R) \\ u_\psi^0 = \psi & \text{on } \Sigma_R. \end{cases}$$

It can easily be proved that

$$a_0(u, v|_{\Omega_R}) = a(\tilde{u}, v) \quad \forall u \in \mathcal{V}_R, \forall v \in \mathcal{V}_\Omega.$$

According to Lemma 3.13, there exists $v \in \mathcal{V}_\Omega, v \neq 0$, such that

$$\begin{aligned} a_0(u, v|_{\Omega_R}) = a(\tilde{u}, v) &\geq \alpha \|\tilde{u}\|_{\mathcal{V}_\Omega} \|v\|_{\mathcal{V}_\Omega} \\ &\geq \alpha \|u\|_{\mathcal{V}_R} \|v|_{\Omega_R}\|_{\mathcal{V}_R}. \end{aligned}$$

This completes the proof. \square

3.5.3 Some useful inequalities

We have the following proposition.

Proposition 3.15 *There exists $c > 0$ such that*

$$\left| \varepsilon \frac{J_n(kR)}{J_n(k\varepsilon)} \right| \geq c \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^{n-1} \quad \forall n \geq n_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Proof. The Bessel function $J_n(z)$ is defined by

$$J_n(z) = \left(\frac{1}{2}z \right)^n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{4}z^2)^p}{p! \Gamma(n+p+1)}.$$

Then we have

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{J_n(kR)}{J_n(k\varepsilon)} &= \varepsilon \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^n \frac{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{4}k^2R^2)^p}{p! \Gamma(n+p+1)}}{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{4}k^2\varepsilon^2)^p}{p! \Gamma(n+p+1)}} \\ &= \varepsilon \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^n \frac{(\Gamma(n+1))^{-1} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{4}k^2R^2)^p}{p! \Gamma(n+p+1)}}{(\Gamma(n+1))^{-1} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{4}k^2\varepsilon^2)^p}{p! \Gamma(n+p+1)}} \\ &= \varepsilon \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^n \frac{1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n!}{p!(n+p)!} (-\frac{1}{4}k^2R^2)^p}{1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n!}{p!(n+p)!} (-\frac{1}{4}k^2\varepsilon^2)^p} \\ &= \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^{n-1} u_n(\varepsilon), \end{aligned}$$

where $u_n(\varepsilon)$ is defined by

$$u_n(\varepsilon) = \frac{R + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{Rn!}{p!(n+p)!} (-\frac{1}{4}k^2R^2)^p}{1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n!}{p!(n+p)!} (-\frac{1}{4}k^2\varepsilon^2)^p}.$$

It is easy to see that the series which intervene in the expression of $u_n(\varepsilon)$ converge normally with respect to (n, ε) . Hence, we have

$$\lim_{(n, \varepsilon) \rightarrow (\infty, 0)} u_n(\varepsilon) = R.$$

Using the limit definition, there exists $c > 0$ such that

$$|u_n(\varepsilon)| \geq c \quad \forall n \geq n_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

This completes the proof. □

By the same techniques we obtain the following result.

Proposition 3.16 *There exists $c > 0$ such that*

$$\left| \frac{Y_n(k\varepsilon)}{Y_n(kR)} \right| \geq c \left(\frac{R}{\varepsilon} \right)^n \quad \forall n \geq n_0, \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

References

- [1] M. ABRAMOWITZ AND I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover 1964.
- [2] G. ALLAIRE AND R. KOHN, *Optimal bounds on the effective behavior of a mixture of two well-order elastic materials*, Quartely of applied Mathematics, LI(4) :643-674, 1993.
- [3] G. ALLAIRE AND R. KOHN, *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures*, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 12(6) :839-878, 1993.
- [4] M. BECKER, *Optimisation topologique de structure en variables discrètes*, Université de Liège, 1996.
- [5] M. BENDSOE, *Optimal topology design of continuum structure : an introduction*, Technical report, Department of mathematics, Technical University of Denmark, DK2800 Lyngby, Denmark, september 1996.
- [6] G. BUTTAZZO AND G. DAL MASO, *Shape optimization for Dirichlet problems : Relaxed Formulation and optimality conditions*, *Appl. Math. Optim.* 23, 17-49, 1991.
- [7] J. CÉA *Conception optimale ou identification de forme, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*, *M.A.A.N.*, 20(3) :371-402, 1986.
- [8] J. CÉA, A.GIOAN AND J. MICHEL, *Quelques résultats sur l'identification de domains*, *CALCOLO*, 1973.
- [9] R. DAUTRAY AND J.-L.LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, collection CEA, 1987.
- [10] S. GARREAU, P. GUILLAUME AND M. MASMOUDI, *The topological sensitivity for linear isotropic elasticity*, European Conference on Computational Mechanics (ECCM99), 1999, rapport MIP 99.45.
- [11] P. GUILLAUME, K. SIDIDRIS, *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem*, accepted in *SIAM journal on Control and Optimization*.
- [12] P. GUILLAUME, K. SIDIDRIS, *Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations*, rapport MIP no. 01-24, 2001.
- [13] P. GUILLAUME AND M. MASMOUDI, *Computation of high order derivatives in optimal shape design*, *Numerische Mathematik* 67, 231-250, 1994.
- [14] P. GUILLAUME, *Dérivées d'ordre supérieur en conception optimale de forme*, Thèse, Université Paul Sabatier, 1994.

- [15] J. JACOBSEN, N. OLHOFF, AND E. RONHOLT, *Generalized shape optimization of three-dimensionnal structures using materials with optimum microstructures*, Technical report, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, DK-9920 Aalborg, Denmark, 1996.
- [16] P. MADER, *Optimisation topologique pour la conception de composants guidés*, Thèse, Université Paul Sabatier, 2002.
- [17] M. MASMOUDI, *The Topological Asymptotic*, in Computational Methods for Control Applications, ed. H. Kawarada and J. Periaux, International Series GAKUTO, 2002.
- [18] M. MASMOUDI, *Outils pour la conception optimale de formes*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.
- [19] M. MASMOUDI, *Numerical Solution for Exterior Problems*, Numerische Mathematik. 51, 87-101, Springer-Verlag 1987.
- [20] M. MASMOUDI, *Résolution numérique de problèmes extérieurs*, Thèse présentée à l'université de Nice, 1979.
- [21] F. MURAT AND J. SIMON, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, thèse d'état, Paris, 1976.
- [22] F. MURAT AND L. TARTAR, *Calcul des variations et homogénéisation*, In Les méthodes de l'homogénéisation : Théorie et Applications en Physique, pages 319-369. Eyrolles, 1985.
- [23] J-C. NÉDÉLEC, *Acoustic and Electromagnetic Equations*, Springer, 2000.
- [24] P.A. RAVIART AND J.M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson 1988.
- [25] J. SOKOLOWSKI AND A. ZOCHOWSKI, *On the topological derivative in shape optimization*, Technical report, INRIA, 1997.
- [26] M. SHOENAUER, L. KALLEL AND F. JOUVE, *Mechanics inclusions identification by evolutionary computation*, Revue européenne des éléments finis, 5(5-6) :619-648, 1996.
- [27] A. SCHUMACHER, *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Topchpositionierungskriterien*, Thesis, Universität-Gesamthochschule Siegen, 1995.
- [28] CH. VASSALLO, *Théorie des guides d'ondes électromagnétiques*, Collection Technique et scientifique des Télécommunications, Eyrolles 1985.

Chapitre 4

Equation de Helmholtz 2D avec condition de Neumann au bord d'un trou de forme quelconque ou d'une fissure

Ce chapitre est constitué de l'article “**The topological asymptotic for the Helmholtz equation with respect to the creation of a hole and a crack with a Neumann condition**”, soumis pour publication.

4.1 Introduction

In shape optimization, the most widespread method, the so-called “classical shape optimization method” [22], consists in deforming continuously the boundary of the domain to be optimized in order to decrease the chosen criterion. The main drawback of this approach is that it does not allow topology changes : the final shape and the initial one, the “initial guess”, contain the same number of holes. Yet, in object detection for example, the topology of the domain is the main unknown of the problem. For that reason, some topological optimization techniques have been developed. Starting from the observation that, in structural mechanics, an optimal geometry does not generally exist in the set of classical designs (there exists minimizing sequences that does not converge in this set), some authors (see *e.g.* [2, 3, 16, 1]) have introduced some “intermediate material” or micro-structures : it is the homogenization theory. Then, they apply penalization techniques to retrieve an admissible shape. The range of application of this approach being restricted to very particular cost functions, global optimization techniques like genetic algorithms and simulated annealing are used to deal with more general problems (see *e.g.* [29]). Unfortunately, these methods have a high computational cost and can hardly be applied to industrial problems.

The topological sensitivity analysis has been introduced by A. Friedman and M.S. Vogelius [7] in the context of shape inversion in electrostatics and by A. Schumacher [28], J. Sokolowski and A. Zochowski [30] for the compliance minimization. The principle is the following. Let us consider a cost function $\mathcal{J}(\Omega) = J_\Omega(u_\Omega)$ where u_Ω is the

solution to a partial differential equation defined in the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ or 3 , a point $x_0 \in \Omega$ and a fixed open and bounded subset ω of \mathbb{R}^n containing the origin. Suppose that we have determined an asymptotic expansion of the criterion \mathcal{J} in the form

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus (\overline{x_0 + \rho\omega})) - \mathcal{J}(\Omega) = f(\rho)g(x_0) + o(f(\rho)), \quad (4.1)$$

where $f(\rho)$ is a positive function tending to zero with ρ . This expansion is called the “topological asymptotic” and g the “topological gradient”. Then, to minimize the criterion, we have interest to remove some material where g is the most negative. A topological sensitivity framework allowing to obtain such an expansion for general cost functions has been worked out by M. Masmoudi [20]. It is based on an adaptation of the lagrangian method and a truncation technique that provides an equivalent formulation of the PDE in a fixed functional space. We recall that the fundamental property of an adjoint method [5] is to express the variation of a scalar function with respect to a parameter by using a solution u_Ω and an adjoint state v_Ω which do not depend on the chosen parameter. From the numerical point of view, only two systems must be solved for obtaining $g(x)$ for all $x \in \Omega$. This observation leads to very efficient numerical algorithms. With the help of that framework, S. Garreau, Ph. Guillaume, M. Masmoudi and K. Sididris have obtained the topological asymptotic for several problems whose associated operator is linear and homogeneous [10, 13, 14]. Another important contribution in this field is brought in [23]. We also refer the reader to [15, 21, 9] for a complete study of the asymptotic behavior of the solution $u_{\Omega \setminus (\overline{x_0 + \rho\omega})}$ in various situations. The first topological sensitivity analysis of a general cost function for a non-homogeneous operator is carried out in [27] in the case of a circular hole with a Dirichlet condition imposed on its boundary.

In this paper, we present an adjoint method that takes into account the variation of the functional space when a Neumann condition is applied on the varying part of the boundary. In this way, a truncation becomes useless. This new formalism brings several technical simplifications, notably concerning the study of cost functions that involve the value of the solution near the hole, for which the truncation requires to transport the cost function in the fixed domain (see [13]). It is then used to determine the topological asymptotic for the two dimensional Helmholtz equation with respect to the insertion of an arbitrary shaped hole and an arbitrary shaped crack, both with a Neumann condition on their boundary. This latter case is probably the first sensitivity analysis with respect to the creation of a crack, the existing contributions in this field focusing on the crack propagation (see *e.g.* [31]). For a circular hole of radius ρ , and a straight crack of length 2ρ and of unit normal \mathbf{n} , the results are summarized in Table 4.1. We denote by $\Re z$ the real part of the complex number z and, for all $u, v \in \mathbb{C}^2$, $u.v = u^T v$. Those formulas are valid for a cost function J_Ω differentiable on the real field. The term δ_J depends on the chosen criterion.

The adjoint method is described in Section 4.2. The problem under consideration is formulated in Section 4.3. The topological asymptotic analysis for a hole and a crack are respectively carried out in Sections 4.4 and 4.5, the most technical proofs being reported in Section 4.8. The coefficient δ_J is calculated for some particular cost functions in Section 4.6. A numerical application is presented in Section 4.7.

	$f(\rho)$	$g(x_0)$
circular hole	$\pi\rho^2$	$-\Re\left(2\nabla u_\Omega(x_0)\cdot\overline{\nabla v_\Omega(x_0)} - k^2 u_\Omega(x_0)\overline{v_\Omega(x_0)}\right) + \delta_J$
straight crack	$\pi\rho^2$	$-\Re\left((\nabla u_\Omega(x_0)\cdot\mathbf{n})(\overline{\nabla v_\Omega(x_0)\cdot\mathbf{n}})\right) + \delta_J$

TAB. 4.1 – Expression of the topological asymptotic.

4.2 An adjoint method for the topology optimization with a Neumann condition

In this section, the adjoint method is generalized to a class of problems for which the solution belongs to a functional space that varies with the parameter. Let $(\mathcal{V}_\rho)_{\rho \geq 0}$ be a family of complex Hilbert spaces such that

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_\rho \quad \forall \rho \geq 0.$$

As we will see further, this situation occurs in topological sensitivity analysis when a Neumann condition is applied on the boundary of the cavities. For all $\rho \geq 0$, let a_ρ be a sesquilinear and continuous form on \mathcal{V}_ρ and l_ρ be a semilinear and continuous form on \mathcal{V}_ρ . We assume that for all $\rho \geq 0$, the variational problem

$$\begin{cases} u_\rho \in \mathcal{V}_\rho, \\ a_\rho(u_\rho, v) = l_\rho(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho \end{cases} \quad (4.2)$$

admits a unique solution. We consider the following assumption.

Hypothesis 4.1 *For all $\rho \geq 0$, there exists on \mathcal{V}_ρ a sesquilinear and continuous form \tilde{a}_ρ and a semilinear and continuous form \tilde{l}_ρ such that*

$$\tilde{a}_\rho(u_0, v) = \tilde{l}_\rho(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho. \quad (4.3)$$

Consider now a criterion $j(\rho) = J_\rho(u_\rho) \in \mathbb{R}$. For all $\rho \geq 0$, the function J_ρ is supposed to be “ \mathbb{R} -differentiable” at the point u_0 in the following sense : there exists a linear and continuous form on \mathcal{V}_ρ denoted by L_ρ such that

$$J_\rho(u_0 + h) - J_\rho(u_0) = \Re L_\rho(h) + o(\|h\|_{\mathcal{V}_\rho}). \quad (4.4)$$

We assume that for all $\rho \geq 0$, the adjoint problem

$$\begin{cases} v_\rho \in \mathcal{V}_\rho, \\ a_\rho(u, v_\rho) = -L_\rho(u) \quad \forall u \in \mathcal{V}_\rho \end{cases} \quad (4.5)$$

admits a unique solution. We call v_0 the adjoint state. The two main hypotheses are indicated below.

Hypothesis 4.2 *There exists two complex numbers δ_a and δ_l and a function $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ such that, when ρ tends to zero,*

$$\begin{aligned} f(\rho) &\longrightarrow 0, \\ (a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) &= f(\rho)\delta_a + o(f(\rho)), \\ (l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) &= f(\rho)\delta_l + o(f(\rho)). \end{aligned}$$

Hypothesis 4.3 *There exists a real number δ_J such that*

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = \Re L_\rho(u_\rho - u_0) + f(\rho)\delta_J + o(f(\rho)),$$

Then, the asymptotic expansion of the criterion $j(\rho)$ is given by the following theorem.

Theorem 4.1 *If hypotheses 4.1, 4.2 and 4.3 hold, then*

$$j(\rho) - j(0) = f(\rho)\Re(\delta_a - \delta_l + \delta_J) + o(f(\rho)).$$

Proof. Using Equation (4.2) and Hypothesis 4.1, we obtain

$$\begin{aligned} j(\rho) - j(0) &= J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) + \Re(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) + \Re a_\rho(u_\rho - u_0, v_\rho) \\ &\quad - \Re(l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho). \end{aligned}$$

Hypotheses 4.2 and 4.3 and Equation (4.5) yield

$$\begin{aligned} j(\rho) - j(0) &= \Re L_\rho(u_\rho - u_0) + f(\rho)\delta_J + f(\rho)\Re\delta_a - \Re L_\rho(u_\rho - u_0) \\ &\quad - f(\rho)\Re\delta_l + o(f(\rho)), \end{aligned}$$

from which we deduce the announced result. \square

4.3 The topological asymptotic problem

4.3.1 Problem formulation

Let Ω be an open, bounded and connected subset of \mathbb{R}^2 with smooth boundary Γ . We assume for simplicity that Γ is piecewise of class C^∞ , but this hypothesis could be considerably weakened. The initial PDE problem is the following : find $u_0 \in H^1(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_n u_0 = S u_0 + \sigma & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (4.6)$$

Here, \mathbf{n} denotes the outward unit normal of Γ , $k \in \mathbb{C}$, $S \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$ and $\sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$. For a given $x_0 \in \Omega$, the perturbed domain is denoted by Ω_ρ . We consider two cases.

- In the case of a perforation, let ω be a fixed open and bounded subset of \mathbb{R}^2 containing the origin and whose boundary Σ is the union of two graphs of functions of class C^1 (that technical hypothesis could also be weakened). We define $\omega_\rho = x_0 + \rho\omega$, $\Sigma_\rho = \partial\omega_\rho$ and $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$ (see Figure 4.1 (a)).
- In the case of a crack, let Σ be a bounded manifold of dimension 1 included in \mathbb{R}^2 which can be considered as the graph of a function of class C^1 . We define $\Sigma_\rho = x_0 + \rho\Sigma$ and $\Omega_\rho = \Omega \setminus \Sigma_\rho$ (see Figure 4.1 (b)).

Possibly changing the coordinate system, we will suppose for convenience that $x_0 = 0$. In both cases, the new field is solution to the problem : find $u_\rho \in H^1(\Omega_\rho)$ such that

$$\begin{cases} \Delta u_\rho + k^2 u_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n u_\rho = S u_\rho + \sigma & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n u_\rho = 0 & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases} \quad (4.7)$$

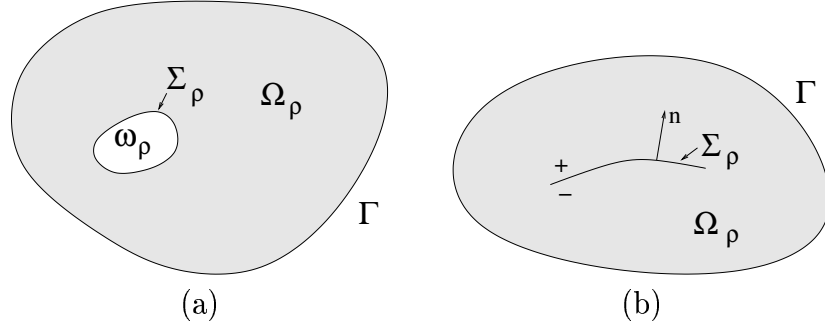


FIG. 4.1 – The perturbed domain : (a) perforated domain, (b) cracked domain.

4.3.2 Well-posedness

The variational formulation of System (4.7) reads in the form of Problem (4.2) with

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\rho &= H^1(\Omega_\rho), \\ \begin{cases} a_\rho(u, v) = \int_{\Omega_\rho} (\nabla u \cdot \nabla \bar{v} - k^2 u \bar{v}) dx - \int_\Gamma S u \bar{v} ds & \forall u, v \in \mathcal{V}_\rho, \\ l_\rho(v) = \int_\Gamma \sigma \bar{v} ds & \forall v \in \mathcal{V}_\rho. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

As usual in analysis, the duality product between $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ and $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ is denoted here and in the sequel by an integral. We assume that S satisfies the following hypothesis.

Hypothesis 4.4 *The operator S is split into $S = S_0 + S_1$ where*

– $S_0 \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$, and satisfies

$$\begin{aligned} \int_\Gamma S_0 \varphi \bar{\psi} ds &= \overline{\int_\Gamma S_0 \psi \bar{\varphi} ds} \quad \forall \varphi, \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \int_\Gamma S_0 \varphi \bar{\varphi} ds &\leq 0 \quad \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \left\{ \int_\Gamma S_0 \varphi \bar{\varphi} ds = 0 \right\} &\Rightarrow \{ \varphi = 0 \text{ on a piece of nonzero measure of } \Gamma \}, \end{aligned}$$

– $S_1 \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$.

Let us give two examples of such an operator.

- If the physical problem under consideration is concerned by electromagnetic or acoustic waves propagating in the free space, then we come down to a PDE posed in a bounded domain by taking S as the Dirichlet-to-Neumann operator associated to the truncation on Γ of the Sommerfeld condition at infinity. When $k \in \{k \in \mathbb{C}, \Im k < 0\} \cup \mathbb{R}_+^*$ and Ω is a ball, it is proved in [19] that Hypothesis 4.4 holds.
- If the boundary condition on Γ is of the form

$$\partial_n u - ik' u = \Phi,$$

where $k' \in \mathbb{C}$, then S is simply a multiplication operator and Hypothesis 4.4 is checked by setting $S_0 = 0$.

Then, we split a_ρ into $a_\rho = a_\rho^0 + a_\rho^1$ with

$$\begin{cases} a_\rho^0(u, v) = \int_{\Omega_\rho} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} dx - \int_\Gamma S_0 u \bar{v} ds, \\ a_\rho^1(u, v) = -k^2 \int_{\Omega_\rho} u \bar{v} dx - \int_\Gamma S_1 u \bar{v} ds. \end{cases} \quad (4.9)$$

We assume the following uniqueness property.

Hypothesis 4.5 *There exists $\rho_0 > 0$ such that for all $\rho \leq \rho_0$,*

$$\begin{aligned} \{a_\rho(u, v) = 0 \ \forall v \in \mathcal{V}_\rho\} &\Rightarrow \{u = 0\}, \\ \{a_\rho(u, v) = 0 \ \forall u \in \mathcal{V}_\rho\} &\Rightarrow \{v = 0\}. \end{aligned}$$

For the examples of operator S given above, Hypothesis 4.5 is satisfied (see *e.g.* [19] and [27]).

We consider a cost function J_ρ “differentiable” in the sense of Equation (4.4). The following proposition is proved in Appendix 4.9.1.

Proposition 4.2 *If Hypotheses 4.4 and 4.5 are satisfied, then we have that, for all $\rho \leq \rho_0$,*

- the sesquilinear form a_ρ^0 is coercive on \mathcal{V}_ρ ,
- the sesquilinear form a_ρ satisfies the inf-sup conditions

$$\inf_{u \neq 0} \sup_{v \neq 0} \frac{|a_\rho(u, v)|}{\|u\|_{\mathcal{V}_\rho} \|v\|_{\mathcal{V}_\rho}} > 0, \quad \inf_{v \neq 0} \sup_{u \neq 0} \frac{|a_\rho(u, v)|}{\|u\|_{\mathcal{V}_\rho} \|v\|_{\mathcal{V}_\rho}} > 0,$$

- Problem (4.2) and the Problem (4.5) have one and only one solution.

Remark 4.6 *The boundary condition on Γ could be replaced without any influence on the topological asymptotic analysis by any condition insuring that Problems (4.2) and (4.5) are well-posed.*

We wish now to apply Theorem 4.1 in this context. The embedding $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_\rho$ is defined by the restriction map $u \in \mathcal{V}_0 \mapsto u|_{\Omega_\rho} \in \mathcal{V}_\rho$. To simplify the notation, $u|_{\Omega_\rho}$ will be still denoted by u . The analysis will be carried out in three steps :

1. to define \tilde{a}_ρ and \tilde{l}_ρ such that Hypothesis 4.1 holds,
2. to determine the function $f(\rho)$ and the complex numbers δ_a and δ_l such that Hypothesis 4.2 holds,
3. for some examples of cost function, to determine δ_J such that Hypothesis 4.3 holds.

For the first two points, the cases of a perforation and of a crack will be studied separately (Sections 4.4 and 4.5). According to Theorem 4.1 the topological gradient at the origin will be

$$g(0) = \Re(\delta_a - \delta_l + \delta_J).$$

Then, a change of coordinates will provide immediately $g(x)$ for any $x \in \Omega$.

4.4 Creation of a hole

In this section, we focus on the case of a perforation : $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$, $\Sigma_\rho = \partial\omega_\rho$.

4.4.1 Equivalent formulation of the initial problem in the perforated domain

For all $\rho \geq 0$, we define the sesquilinear form

$$b_\rho(u, v) = \int_{\omega_\rho} (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} - k^2 u \overline{v}) dx \quad \forall u, v \in H^1(\omega_\rho).$$

Using the Poincaré inequality, it is easy to prove that, when ρ is sufficiently small (namely $k \text{ diam}(\omega_\rho) < 1$), b_ρ is coercive on $H_0^1(\omega_\rho)$. For such a ρ and $\varphi \in H^{1/2}(\Sigma_\rho)$, let $h_\rho^\varphi \in H^1(\omega_\rho)$ be the solution to

$$\begin{cases} \Delta h_\rho^\varphi + k^2 h_\rho^\varphi = 0 & \text{in } \omega_\rho, \\ h_\rho^\varphi = \varphi & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases} \quad (4.10)$$

We set for all $u, v \in H^1(\Omega_\rho)$

$$\begin{cases} \tilde{a}_\rho(u, v) = a_\rho(u, v) + b_\rho(h_\rho^u, h_\rho^v), \\ \tilde{l}_\rho(v) = l_\rho(v). \end{cases}$$

It is then standard in PDE theory that Hypothesis 4.1 holds.

Since $\tilde{l}_\rho = l_\rho$, we have by construction

$$\delta_l = 0.$$

It remains to determine $f(\rho)$ and δ_a , that is, to calculate the first order expansion with respect to ρ of the quantity

$$(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) = -b_\rho(u_0, h_\rho^{v_\rho}).$$

In this expression, we have taken into account the fact that, by uniqueness, $h_\rho^{u_0} = u_0$. The first step is to estimate $h_\rho^{v_\rho}$.

4.4.2 Preliminary calculus

We set

$$w_\rho = v_\rho - v_0.$$

In order to estimate w_ρ , we need the following assumption on the right hand side of the adjoint equation.

Hypothesis 4.7 *There exists a function L of regularity $C^0 \cap H^1$ in a neighborhood of the origin such that for all $u \in H^1(\Omega)$ and all ρ sufficiently small,*

$$L_0(u) = L_\rho(u|_{\Omega_\rho}) + \int_{\omega_\rho} L u dx. \quad (4.11)$$

The following lemma provides in particular the variational equation satisfied by w_ρ .

Lemma 4.3 *For all ρ sufficiently small, we have*

1. *in the sense of distributions,*

$$\Delta v_0 + \bar{k}^2 v_0 = \bar{L} \quad \text{in } \omega_\rho, \quad (4.12)$$

2. *for all $u \in H^1(\omega_\rho)$,*

$$b_\rho(u, v_0) = \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n v_0} u ds - \int_{\omega_\rho} L u dx, \quad (4.13)$$

3. *for all $u \in H^1(\Omega_\rho)$,*

$$a_\rho(u, w_\rho) = \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n v_0} u ds. \quad (4.14)$$

Proof.

1. It suffices to consider Equation (4.5) with $\rho = 0$ and a test function v of class \mathcal{C}^∞ and whose support is included in ω_ρ .
2. It is a consequence of the Green formula.
3. Let $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ be an extension of u in ω_ρ . We have

$$\begin{aligned} a_\rho(u, v_0) &= a_0(\tilde{u}, v_0) - b_\rho(\tilde{u}, v_0) \\ &= -L_0(\tilde{u}) - \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n v_0} \tilde{u} ds + \int_{\omega_\rho} L \tilde{u} dx \\ &= -L_\rho(u) - \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n v_0} u ds. \end{aligned}$$

It suffices to write that $a_\rho(u, w_\rho) = a_\rho(u, v_\rho) - a_\rho(u, v_0)$ to obtain the desired result. □

Let $S^* \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$ be the adjoint of S . We recall it is defined by

$$\int_{\Gamma} S \varphi \bar{\psi} ds = \overline{\int_{\Gamma} S^* \psi \bar{\varphi} ds} \quad \forall \varphi, \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma). \quad (4.15)$$

Then, the classical formulation corresponding to Problem (4.14) reads :

$$\begin{cases} \Delta w_\rho + \bar{k}^2 w_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n w_\rho = -\partial_n v_0 & \text{on } \Sigma_\rho, \\ \partial_n w_\rho = S^* w_\rho & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (4.16)$$

For all $\rho \geq 0$ and $\varphi \in H^{1/2}(\Sigma_\rho)$, we define the function l_ρ^φ as the solution in $H^1(\omega_\rho)$ to

$$\begin{cases} \Delta l_\rho^\varphi = 0 & \text{in } \omega_\rho, \\ l_\rho^\varphi = \varphi & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases}$$

The following lemma provides another expression of $(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho)$ that suits better for the asymptotic analysis.

Lemma 4.4

$$\begin{aligned}
(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) &= - \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n v_0}(u_0 - u_0(0)) ds + \int_{\omega_\rho} L(u_0 - u_0(0)) + k^2 u_0(0) \int_{\omega_\rho} \overline{v_0} dx \\
&\quad - \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n l_\rho^{w_\rho}}(u_0 - u_0(0)) ds + k^2 \int_{\omega_\rho} u_0 \overline{l_\rho^{w_\rho}} dx.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Proof. The calculus is based on the Green formula and Lemma 4.3 :

$$\begin{aligned}
(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) &= -b_\rho(u_0, h_\rho^{v_\rho}) \\
&= - \int_{\Sigma_\rho} \partial_n u_0 \overline{v_\rho} ds \\
&= - \int_{\Sigma_\rho} \partial_n u_0 \overline{v_0} ds - \int_{\Sigma_\rho} \partial_n u_0 \overline{w_\rho} ds \\
&= k^2 \int_{\omega_\rho} (u_0 - u_0(0)) \overline{v_0} dx - \int_{\omega_\rho} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v_0} dx \\
&\quad + k^2 u_0(0) \int_{\omega_\rho} \overline{v_0} dx - \int_{\Sigma_\rho} \partial_n u_0 \overline{l_\rho^{w_\rho}} ds \\
&= - \int_{\omega_\rho} (u_0 - u_0(0)) (\overline{\Delta v_0} - L) dx - \int_{\omega_\rho} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v_0} dx \\
&\quad + k^2 u_0(0) \int_{\omega_\rho} \overline{v_0} dx + k^2 \int_{\omega_\rho} u_0 \overline{l_\rho^{w_\rho}} dx - \int_{\omega_\rho} \nabla (u_0 - u_0(0)) \cdot \overline{\nabla l_\rho^{w_\rho}}.
\end{aligned}$$

Applying twice again the Green formula, we obtain the desired result. \square

4.4.3 Heuristics

Our goal now is to determine in an heuristic way the first order expansion of the expression given by Lemma 4.4. Complete proofs are reported in Section 4.8.

Estimation of w_ρ

A satisfactory approximation of w_ρ is expected to be the function

$$p_\rho(x) = \rho P \left(\frac{x}{\rho} \right),$$

where $P \in W^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega})$, independent of ρ , is the solution to

$$\begin{cases} \Delta P = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \\ P = O(1/r) & \text{at } \infty, \\ \partial_n P(x) = -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} & \text{on } \Sigma. \end{cases} \tag{4.18}$$

In Appendix 4.9.2, we have summarized some useful results concerning exterior Laplace problems. The existence and uniqueness of the solution to Problem (4.18) comes

basically from the fact that $\int_{\partial\omega} \nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} ds = 0$. The function P may be written with the help of a single layer potential :

$$P(x) = \int_{\Sigma} \lambda(y) E(x-y) ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \quad (4.19)$$

where $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Sigma)$ is the unique solution to the boundary integral equation

$$\frac{\lambda(x)}{2} + \int_{\Sigma} \lambda(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y) = -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} \quad \forall x \in \Sigma. \quad (4.20)$$

We refer the reader to Appendix 4.9.2 for the definitions of the fundamental solution E and of the space $H_0^{-1/2}(\Sigma)$.

Asymptotic expansion

We write Equation (4.17) in the form

$$\begin{aligned} (a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) &= - \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n v_0}(u_0 - u_0(0)) ds + k^2 \rho^2 \text{meas}(\omega) u_0(0) \overline{v_0(0)} \\ &\quad - \int_{\Sigma_\rho} \overline{\partial_n l_\rho^{p\rho}}(u_0 - u_0(0)) ds + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\rho) &= - \int_{\Sigma_\rho} (\overline{\partial_n l_\rho^{w\rho}} - \overline{\partial_n l_\rho^{p\rho}})(u_0 - u_0(0)) ds, \quad \mathcal{E}_2(\rho) = \int_{\omega_\rho} L(u_0 - u_0(0)) dx, \\ \mathcal{E}_3(\rho) &= k^2 u_0(0) \left[\int_{\omega_\rho} \overline{v_0} dx - \rho^2 \text{meas}(\omega) \overline{v_0(0)} \right] \text{ and } \mathcal{E}_4(\rho) = k^2 \int_{\omega_\rho} u_0 \overline{l_\rho^{w\rho}} dx. \end{aligned}$$

For all $\varphi \in H^{1/2}(\Sigma)$, let l^φ be the solution to

$$\begin{cases} \Delta l^\varphi = 0 & \text{in } \omega, \\ l^\varphi = \varphi & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

For all $x \in \Sigma_\rho$, we have

$$l_\rho^{p\rho}(x) = \rho l^P \left(\frac{x}{\rho} \right) \quad \text{and} \quad \partial_n l_\rho^{p\rho}(x) = \partial_n l^P \left(\frac{x}{\rho} \right).$$

The second jump relation of Theorem 4.16 (in the appendix) yields

$$\lambda(y) = -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} - \partial_n l^P(y) \quad \forall y \in \Sigma.$$

Thus,

$$(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) = \int_{\Sigma_\rho} \overline{\lambda \left(\frac{x}{\rho} \right)} (u_0 - u_0(0)) ds + k^2 \rho^2 \text{meas}(\omega) u_0(0) \overline{v_0(0)}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Sigma_\rho} (\overline{\partial_n v_0} - \overline{\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}})(u_0 - u_0(0)) ds + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho) \\
= & \rho \int_{\Sigma} \overline{\lambda(x)}(u_0(\rho x) - u_0(0)) ds + k^2 \rho^2 \text{meas}(\omega) u_0(0) \overline{v_0(0)} \\
& - \rho \int_{\Sigma} (\overline{\partial_n v_0(\rho x)} - \overline{\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}})(u_0(\rho x) - u_0(0)) ds + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho).
\end{aligned}$$

Finally, denoting

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_5(\rho) &= -\rho \int_{\Sigma} (\overline{\partial_n v_0(\rho x)} - \overline{\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}})(u_0(\rho x) - u_0(0)) ds, \\
\mathcal{E}_6(\rho) &= \rho \int_{\Sigma} \overline{\lambda(y)}(u_0(\rho y) - u_0(0) - \nabla u_0(0) \cdot \rho y) ds(y),
\end{aligned}$$

we obtain

$$(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, v_\rho) = \rho^2 \nabla u_0(0) \cdot \int_{\Sigma} \overline{\lambda(x)} x ds(x) + k^2 \rho^2 \text{meas}(\omega) u_0(0) \overline{v_0(0)} + \sum_{i=1}^6 \mathcal{E}_i(\rho).$$

In Subsection 4.8.2, we prove that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho^2)$ for all $i = 1, \dots, 6$. Therefore, we set

$$f(\rho) = \rho^2,$$

$$\delta_a = \nabla u_0(0) \cdot \int_{\Sigma} \overline{\lambda(x)} x ds(x) + k^2 \text{meas}(\omega) u_0(0) \overline{v_0(0)}.$$

Thanks to the linearity of Integral Equation (4.20), we can write

$$\int_{\Sigma} \lambda(x) x ds(x) = -\mathcal{A} \nabla v_0(0)$$

where the matrix \mathcal{A} is defined by

$$\mathcal{A}V = \int_{\Sigma} \eta(x) x ds(x) \quad \forall V \in \mathbb{C}^2, \quad (4.21)$$

the density $\eta \in H_0^{-1/2}(\Sigma)$ denoting the unique solution to

$$\frac{\eta(x)}{2} + \int_{\Sigma} \eta(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y) = V \cdot \mathbf{n} \quad \forall x \in \Sigma. \quad (4.22)$$

As \mathcal{A} maps a vector of \mathbb{R}^2 into a vector of \mathbb{R}^2 , its coefficients are real numbers. It is called a polarization tensor [25]. It is proved *e.g.* in [7] that it is symmetric positive definite. Then, we obtain the following result as a consequence of Theorem 4.1.

Theorem 4.5 *Supposing that*

- the cost function satisfies Hypothesis 4.3 with $f(\rho) = \rho^2$,
- Hypotheses 4.4, 4.5 and 4.7 are satisfied,

– the adjoint state v_0 is solution to

$$\begin{cases} u_0 \in H^1(\Omega), \\ a_0(u, v_0) = -L_0(u) \quad \forall u \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (4.23)$$

– the polarization matrix \mathcal{A} is defined by (4.21),
the cost function has the following asymptotic expansion :

$$j(\rho) - j(0) = \rho^2 \Re \left(-\nabla u_0(0) \cdot \overline{\mathcal{A} \nabla v_0(0)} + k^2 \text{meas}(\omega) u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta_J \right) + o(\rho^2). \quad (4.24)$$

4.4.4 Circular hole

Let ω be the unit discus $B(0, 1)$. The solution to Equation (4.22) reads

$$\eta(x) = 2V \cdot x \quad \forall x \in \Sigma$$

and we obtain that

$$\mathcal{A} = 2\pi I.$$

The topological asymptotic becomes

$$j(\rho) - j(0) = \pi \rho^2 \Re \left(-2 \nabla u_0(0) \cdot \overline{\nabla v_0(0)} + k^2 u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta_J \right) + o(\rho^2). \quad (4.25)$$

4.5 Creation of a Crack

We consider now the case of the insertion of a crack : $\Omega_\rho = \Omega \setminus \Sigma_\rho$.

4.5.1 Equivalent formulation of the initial problem in the cracked domain

We set for all $\rho \geq 0$ and all $u, v \in H^1(\Omega_\rho)$

$$\begin{cases} \tilde{a}_\rho(u, v) = a_\rho(u, v), \\ \tilde{l}_\rho(v) = a_\rho(u_0, v). \end{cases}$$

It is then obvious that Hypothesis 4.1 holds.

We have in this case by construction

$$\delta_a = 0.$$

It remains to determine $f(\rho)$ and δ_l , which is the purpose of what follows.

4.5.2 Preliminary calculus

We have thanks to the Green formula essentially

$$\begin{aligned}
(l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) &= l_\rho(v_\rho) - a_\rho(u_0, v_\rho) \\
&= \int_\Gamma \sigma \bar{v}_\rho ds - \int_{\Omega_\rho} (\nabla u_0 \cdot \nabla \bar{v}_\rho - k^2 u_0 \bar{v}_\rho) dx + \int_\Gamma S u_0 \bar{v}_\rho ds \\
&= \int_{\Sigma_\rho} \partial_n u_0 [\bar{v}_\rho] ds \\
&= \int_{\Sigma_\rho} \partial_n u_0 [\bar{w}_\rho] ds \\
&= \rho \int_\Sigma \partial_n u_0(\rho x) [\overline{w_\rho(\rho x)}] ds,
\end{aligned}$$

where $[v_\rho] = v_{\rho|\Sigma_\rho}^+ - v_{\rho|\Sigma_\rho}^- \in H_{00}^{1/2}(\Sigma_\rho)$ (see Figure 4.1 and Definition (4.47)) and $w_\rho = v_\rho - v_0$. We make the following assumption on the cost function.

Hypothesis 4.8 For all ρ sufficiently small and all $u \in H^1(\Omega)$,

$$L_0(u) = L_\rho(u|_{\Omega_\rho}). \quad (4.26)$$

Moreover, L_0 , considered as a distribution, is a function of regularity H^1 in a neighborhood of the origin.

Then, the function w_ρ satisfies :

$$\begin{cases} \Delta w_\rho + \bar{k}^2 w_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n w_\rho = -\partial_n v_0 & \text{on } \Sigma_\rho, \\ \partial_n w_\rho = S^* w_\rho & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (4.27)$$

4.5.3 Heuristics

Estimation of w_ρ

We expect that a satisfactory approximation of w_ρ is provided by

$$p_\rho(x) = \rho P_\rho \left(\frac{x}{\rho} \right),$$

where $P_\rho \in W^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma)$ is the solution to

$$\begin{cases} \Delta P_\rho = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma, \\ P_\rho = O(1/r) & \text{at } \infty, \\ \partial_n P_\rho(x) = -\partial_n v_0(\rho x) & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

That function P_ρ can be written with the help of a double layer potential :

$$P_\rho(x) = \int_\Sigma \mu_\rho(y) \partial_{n_y} E(x-y) ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma, \quad (4.28)$$

where $\mu_\rho \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ is defined by

$$\mu_\rho = T(-\partial_n v_0(\rho x)), \quad (4.29)$$

the map T being an isomorphism from $H_{00}^{1/2}(\Sigma)'$ into $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ (see Theorem 4.17 in the appendix). Then, we approximate μ_ρ by

$$\mu = T(-\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}). \quad (4.30)$$

Asymptotic expansion

Denoting by

$$\mathcal{E}_1(\rho) = \rho \int_{\Sigma} \partial_n u_0(\rho x) [\overline{(w_\rho - p_\rho)(\rho x)}] ds,$$

we have

$$(l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) = \rho^2 \int_{\Sigma} \partial_n u_0(\rho x) [\overline{P_\rho}] ds + \mathcal{E}_1(\rho).$$

According to the jump relation of theorem 4.17, $[P_\rho] = -\mu_\rho$. Hence,

$$\begin{aligned} (l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) &= -\rho^2 \int_{\Sigma} \partial_n u_0(\rho x) \overline{\mu_\rho} ds + \mathcal{E}_1(\rho) \\ &= -\rho^2 \int_{\Sigma} \partial_n u_0(\rho x) \overline{\mu} ds + \mathcal{E}_1(\rho) + \mathcal{E}_2(\rho) \end{aligned}$$

with

$$\mathcal{E}_2(\rho) = -\rho^2 \int_{\Sigma} \partial_n u_0(\rho x) (\overline{\mu_\rho - \mu}) ds.$$

Finally, setting

$$\mathcal{E}_3(\rho) = -\rho^2 \int_{\Sigma} (\partial_n u_0(\rho x) - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}) \overline{\mu} ds,$$

we have

$$(l_\rho - \tilde{l}_\rho)(v_\rho) = -\rho^2 \int_{\Sigma} \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} \overline{\mu} ds + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i(\rho).$$

In Subsection 4.8.3, we prove that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho^2)$ for all $i = 1, \dots, 3$. Therefore, we set

$$f(\rho) = \rho^2,$$

$$\delta_l = \int_{\Sigma} \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} \overline{\mu} ds.$$

Again, it is convenient to introduce a polarization matrix \mathcal{B} defined by

$$\mathcal{B}V = \int_{\Sigma} \eta \mathbf{n} ds \quad \forall V \in \mathbb{C}^2, \quad (4.31)$$

where

$$\eta = T(V \cdot \mathbf{n}). \quad (4.32)$$

We obtain the following result as a consequence of Theorem 4.1.

Theorem 4.6 *Supposing that*

- *the cost function satisfies Hypothesis 4.3 with $f(\rho) = \rho^2$,*
- *Hypotheses 4.4, 4.5 and 4.8 are satisfied,*
- *the adjoint state v_0 is solution to (4.23),*
- *the polarization matrix \mathcal{B} is defined by (4.31),*

the cost function has the following asymptotic expansion :

$$j(\rho) - j(0) = \rho^2 \Re \left(-\nabla u_0(0) \cdot \overline{\mathcal{B} \nabla v_0(0)} + \delta_J \right) + o(\rho^2). \quad (4.33)$$

4.5.4 Straight crack

Let Σ be the segment $(-1, 1) \times \{0\}$. Using Theorem 4.17 in the appendix, we check that the solution to Equation (4.32) is

$$\eta(x) = 2(V \cdot \mathbf{n}) \sqrt{1 - x_1^2} \quad \forall x = (x_1, 0) \in \Sigma.$$

Then, the polarization matrix is

$$\mathcal{B} = \pi \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

and the topological asymptotic becomes

$$j(\rho) - j(0) = \rho^2 \Re \left(-\pi (\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}) (\overline{\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}}) + \delta_J \right) + o(\rho^2). \quad (4.34)$$

Consider now the case where $\delta_J = 0$. For a straight crack of normal \mathbf{n} , the topological gradient at the origin is

$$g(0, \mathbf{n}) = -\pi \Re (\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}) (\overline{\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}}) = -\pi M(0) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n},$$

where $M(0)$ is the hermitian matrix defined by

$$M(0) = \frac{\nabla u_0(0) \otimes \overline{\nabla v_0(0)} + \nabla v_0(0) \otimes \overline{\nabla u_0(0)}}{2}.$$

The topological gradient is minimal when the normal \mathbf{n} is an eigenvector associated to the greatest eigenvalue λ_1 of the symmetric matrix $\Re M(0)$. For that orientation, $g(0, \mathbf{n}) = -\pi \lambda_1$.

4.6 Particular cost functions

The following theorem is proved in Subsection 4.8.4.

Theorem 4.7 *For the following cost functions, Hypotheses 4.3, 4.7 and 4.8 hold for the values of δ_J indicated below.*

1. *First example. The easiest example is the case where the cost function is of the form*

$$J_\rho(u_\rho) = J(u_{\rho|D_R}).$$

where $D_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$, R being a fixed radius such that $\overline{B(0, R)} \subset \Omega$. We assume that there exists $L_0 \in (H^1(D_R))'$ such that

$$J(u_0|_{D_R} + h) - J(u_0|_{D_R}) = \Re L_0(h) + o(\|h\|_{1, D_R}).$$

Then

$$\delta_J = 0.$$

2. *Second example. It consists in the cost function*

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} |u - u_d|^2 dx,$$

where u_d belongs to $H^1(\Omega)$ and is continuous in a neighborhood of the origin. In this case,

$$\delta_J = \begin{cases} -\text{meas}(\omega) |u_0(0) - u_d(0)|^2 & \text{for a hole,} \\ 0 & \text{for a crack.} \end{cases}$$

4.7 Numerical experiments

In this section, we use the topological gradient as a tool for the localization of metallic objects with the help of electromagnetic waves. Consider an open and bounded subset Ω of \mathbb{R}^2 whose boundary Γ is a regular polygon of N sides $\Gamma_i, i = 1, \dots, N$. On each side is successively emitted an E-plane wave, so that the behavior of the vertical component u_i of the magnetic field can be modeled with a rather good accuracy by the PDE :

$$\begin{cases} \Delta u_i^0 + k^2 u_i^0 = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_n u_i^0 - i k u_i^0 = 0 & \text{on } \Gamma_l, l \neq i, \\ \partial_n u_i^0 - i k u_i^0 = -2ik & \text{on } \Gamma_i. \end{cases}$$

Suppose now that a metallic body \mathcal{O} (not necessary connected) of boundary Γ_0 is placed inside Ω . The new fields u_i^m satisfy :

$$\begin{cases} \Delta u_i^m + k^2 u_i^m = 0 & \text{in } \Omega \setminus \bar{\mathcal{O}}, \\ \partial_n u_i^m = 0 & \text{on } \Gamma_0, \\ \partial_n u_i^m - i k u_i^m = 0 & \text{on } \Gamma_l, l \neq i, \\ \partial_n u_i^m - i k u_i^m = -2ik & \text{on } \Gamma_i. \end{cases}$$

We define the following linear form on $L^1(\Gamma_j)$:

$$S_j(u) = \int_{\Gamma_j} u ds.$$

We assume that we have at our disposal the measurements

$$S_{ij}^m = S_j(u_i^m), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Our aim is to detect the actual objects thanks to the knowledge of the matrix $(S_{ij}^m)_{i,j=1,\dots,N}$. For doing this, we look for the best locations to insert some metal in order to minimize the cost function

$$J(u_1, \dots, u_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |S_j(u_i) - S_{ij}^m|^2,$$

the variables $u_i, i = 1, \dots, N$ denoting the magnetic fields obtained after the modification of design. That information will be precisely provided by the topological gradient. To compute it, we need here N adjoint states v_i^0 defined by :

$$\begin{cases} \Delta \overline{v_i^0} + k^2 \overline{v_i^0} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \partial_n \overline{v_i^0} - ik \overline{v_i^0} = 0 & \text{on } \Gamma_l, l \neq i, \\ \partial_n \overline{v_i^0} - ik \overline{v_i^0} = -2 \sum_{j=1}^N \overline{(S_j(u_i^0) - S_{ij}^m)} & \text{on } \Gamma_i. \end{cases}$$

Clearly, as the cost function is the sum of N terms, each term depending on one field u_i , the topological gradient $g(x)$ at the point x is the sum of the N corresponding contributions. Thanks to Theorem 4.7 (the cost function belongs to the first category), all the hypotheses of Theorems 4.5 and 4.6 are checked and we have :

- for a circular hole (physically a small metallic discus),

$$g(x) = -\pi \sum_{i=1}^N \Re \left(2 \nabla u_i^0(x) \cdot \overline{\nabla v_i^0(x)} - k^2 u_i^0(x) \overline{v_i^0(x)} \right),$$

- for a straight crack with an optimal orientation (physically a small metallic wire),

$$g(x) = -\pi \lambda_1(x),$$

where $\lambda_1(x)$ is the greatest eigenvalue of the symmetric matrix

$$M(x) = \sum_{i=1}^N \Re \left(\frac{\nabla u_i^0(x) \otimes \overline{\nabla v_i^0(x)} + \nabla v_i^0(x) \otimes \overline{\nabla u_i^0(x)}}{2} \right).$$

We present a computation to illustrate each formula (see Figure 4.2). Both are performed with $k = 10$ and $N = 32$. The measurements are simulated numerically. We observe that the actual objects lie in the regions where the topological gradient is the most negative.

We emphasize that these results are obtained in only one iteration, our aim being only to localize the objects. In order to capture their shape, we would have interest to use an iterative algorithm or, after having obtained the right topology, to use a classical shape optimization method.

4.8 Proofs

The aim of this section is to prove Theorems 4.5, 4.6 and 4.7. We recall that, for a given radius $R > 0$, $D_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$. The letter c denotes any positive constant changing from place to place but never depending on ρ .

4.8.1 Preliminary lemmas

The following lemmas are valid for both types of domain perturbation. We use the notations :

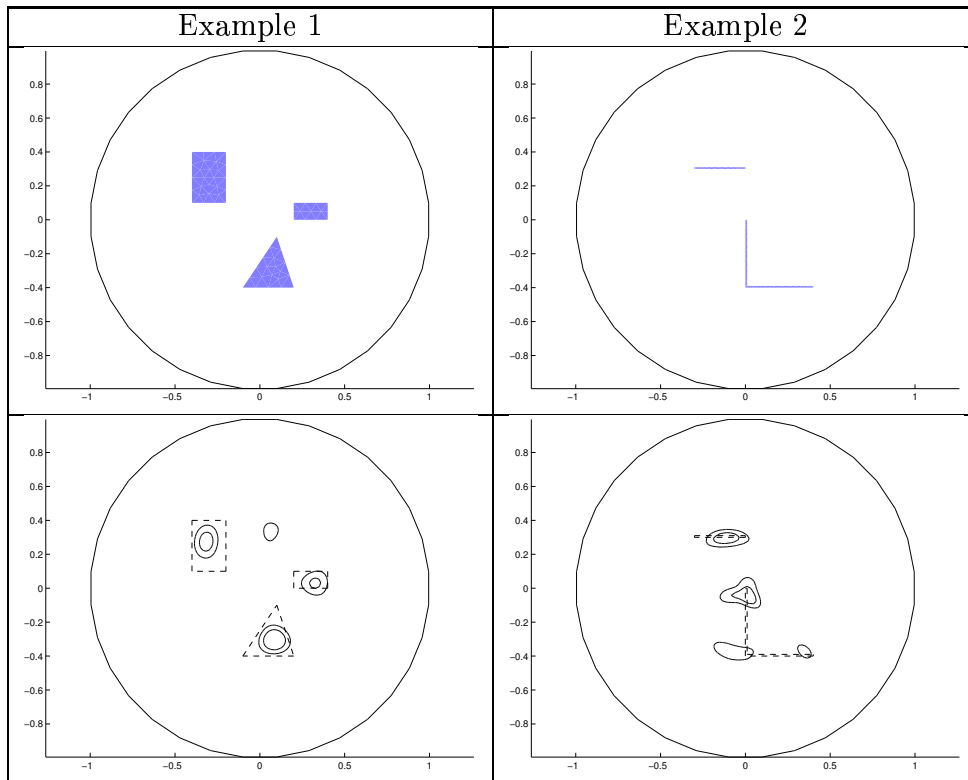


FIG. 4.2 – At the top : the sought objects, at the bottom : superposition of the actual objects and two negative isovalues of the topological gradient. In Example 1, we use the topological gradient for a circular hole whereas in Example 2 it corresponds to a straight crack oriented in an optimal way.

– for a perforation,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Sigma) &= H_0^{-1/2}(\Sigma), & \mathcal{T}(\Sigma_\rho) &= H_0^{-1/2}(\Sigma_\rho), \\ \mathcal{U} &= \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, & \mathcal{U}_\rho &= \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}_\rho, \end{aligned}$$

– for a crack,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\Sigma) &= H_{00}^{1/2}(\Sigma)', & \mathcal{T}(\Sigma_\rho) &= H_{00}^{1/2}(\Sigma_\rho)', \\ \mathcal{U} &= \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma, & \mathcal{U}_\rho &= \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma_\rho. \end{aligned}$$

We refer to Appendix 4.9.2 for the definitions of those functional spaces.

Lemma 4.8 *Consider $g \in \mathcal{T}(\Sigma)$ and let $z \in W^1(\mathcal{U})$ be the solution to the problem*

$$\begin{cases} \Delta z = 0 & \text{in } \mathcal{U}, \\ z = O(1/r) & \text{at } \infty, \\ \partial_n z = g & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

There exists $c > 0$ such that

$$|z|_{1, \frac{1}{\rho} D_R} \leq c\rho \|g\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}.$$

Proof. Let us first consider the case of a hole. By Theorem 4.16 (in the appendix), there exists $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Sigma)$ such that

$$z(x) = \int_{\Sigma} \lambda(y) E(x-y) ds(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega},$$

where λ depends continuously on g . Using a Taylor expansion of E computed at the point x , we obtain that

$$|\nabla z(x)| \leq \frac{c}{|x|^2} \|g\|_{-1/2, \Sigma},$$

from which we deduce easily the result. For a crack, we obtain from Theorem 4.17 the existence of $\mu \in H_{00}^{1/2}(\Sigma)$ such that

$$z(x) = \int_{\Sigma} \mu(y) \partial_{n_y} E(x-y) ds(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma.$$

The argumentation is then similar to the previous case. □

Lemma 4.9 *For all ρ and all $g \in \mathcal{T}(\Sigma_\rho)$ the solution $z_\rho \in W^1(\mathcal{U}_\rho)$ to the problem*

$$\begin{cases} \Delta z_\rho = 0 & \text{in } \mathcal{U}_\rho, \\ z_\rho = O(1/r) & \text{at } \infty, \\ \partial_n z_\rho = g & \text{on } \Sigma_\rho \end{cases}$$

satisfies

$$\begin{aligned} \|z_\rho\|_{0, \Omega_\rho} &\leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}, \\ |z_\rho|_{1, \Omega_\rho} &\leq c\rho \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}, \\ |z_\rho|_{1, D_R} &\leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}. \end{aligned}$$

Proof. Let us set $Z_\rho(x) = z_\rho(\rho x)$. We have

$$\begin{cases} \Delta Z_\rho = 0 & \text{in } \mathcal{U}, \\ Z_\rho = O(1/r) & \text{at } \infty, \\ \partial_n Z_\rho = \rho g(\rho x) & \text{on } \Sigma. \end{cases}$$

By elliptic regularity, we have

$$\|Z_\rho\|_{W^1(\mathcal{U})} \leq c \|\rho g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}.$$

A change of variable yields

$$\|z_\rho\|_{0,\Omega_\rho} \leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)},$$

$$|z_\rho|_{1,\Omega_\rho} \leq c\rho \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}.$$

The last sought inequality results from Lemma 4.8 and a change of variable. \square

Lemma 4.10 Consider $\sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\rho \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ and let $z_\rho \in H^1(\Omega_\rho)$ be the solution to the problem

$$\begin{cases} \Delta z_\rho + k^2 z_\rho = f & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n z_\rho = S z_\rho + \sigma & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n z_\rho = 0 & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases}$$

There exists $\rho_2 > 0$ and a constant $c > 0$ independent of ρ , f and σ such that for all $\rho < \rho_2$

$$\|z_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq c \|f\|_{0,\Omega_\rho} + c \|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}.$$

This result remains true if we replace S by S^* and k by \bar{k} .

Proof. We present the proof in the most technical case of a perforation. We choose a parameter ρ_1 such that $k \text{diam}(\omega_{\rho_1}) < 1$. Let ρ_2 be such that $\omega_\rho \subset \omega_{\rho_1}$ for all $\rho < \rho_2$. For all $u \in H^1(\Omega_{\rho_1})$, we define the function $\hat{u} \in H^1(\Omega)$ by

$$\hat{u} = \begin{cases} u & \text{in } \Omega_{\rho_1}, \\ h_{\rho_1}^u & \text{in } \omega_{\rho_1}, \end{cases}$$

where h_ρ^φ is defined by (4.10). For all $v \in H^1(\Omega)$, we have

$$\begin{aligned} a_0(\widehat{z_\rho|_{\Omega_{\rho_1}}}, v) &= a_\rho(z_\rho, v) + \left[a_0(\widehat{z_\rho|_{\Omega_{\rho_1}}}, v) - a_\rho(z_\rho, v) \right] \\ &= - \int_{\Omega_\rho} f \bar{v} dx + \int_\Gamma \sigma \bar{v} ds + A_\rho + B_\rho \end{aligned}$$

with

$$A_\rho = \int_{\omega_{\rho_1} \setminus \omega_\rho} \nabla(h_{\rho_1}^{z_\rho} - z_\rho) \cdot \overline{\nabla v} dx - k^2 \int_{\omega_{\rho_1} \setminus \omega_\rho} (h_{\rho_1}^{z_\rho} - z_\rho) \bar{v} dx,$$

$$B_\rho = \int_{\omega_\rho} \nabla h_{\rho_1}^{z_\rho} \cdot \overline{\nabla} v dx - k^2 \int_{\omega_\rho} h_{\rho_1}^{z_\rho} \bar{v} dx.$$

Let us first estimate B_ρ . We have

$$\|h_{\rho_1}^{z_\rho}\|_{1,\omega_\rho} \leq c\rho \|h_{\rho_1}^{z_\rho}\|_{C^1(\omega_\rho)} \leq c\rho \|z_\rho\|_{\frac{1}{2},\Sigma_{\rho_1}} \leq c\rho \|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}}. \quad (4.35)$$

Thus,

$$|B_\rho| \leq c \|h_{\rho_1}^{z_\rho}\|_{1,\omega_\rho} \|v\|_{1,\omega_\rho} \leq c\rho \|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}} \|v\|_{1,\Omega}.$$

Let us now estimate A_ρ . We have

$$|A_\rho| \leq c \|h_{\rho_1}^{z_\rho} - z_\rho\|_{1,\omega_{\rho_1} \setminus \omega_\rho} \|v\|_{1,\omega_{\rho_1} \setminus \omega_\rho}.$$

The function $y_\rho = h_{\rho_1}^{z_\rho} - z_\rho$ is solution to

$$\begin{cases} \Delta y_\rho + k^2 y_\rho = -f & \text{in } \omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho, \\ y_\rho = 0 & \text{on } \Sigma_{\rho_1}, \\ \partial_n y_\rho = \partial_n h_{\rho_1}^{z_\rho} & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases}$$

It is split into $y_\rho = y_\rho^1 + y_\rho^2$ with

$$\begin{cases} \Delta y_\rho^1 = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}_\rho, \\ y_\rho^1 = O(1/r) & \text{at } \infty, \\ \partial_n y_\rho^1 = \partial_n h_{\rho_1}^{z_\rho} & \text{on } \Sigma_\rho, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta y_\rho^2 + k^2 y_\rho^2 = -k^2 y_\rho^1 - f & \text{in } \omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho, \\ y_\rho^2 = -y_\rho^1 & \text{on } \Sigma_{\rho_1}, \\ \partial_n y_\rho^2 = 0 & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases}$$

According to lemma 4.9,

$$\|y_\rho^1\|_{1,\omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho} \leq c\rho \|\partial_n h_{\rho_1}^{z_\rho}(\rho x)\|_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leq c\rho \|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}}. \quad (4.36)$$

Using Proposition 4.18 and the Lax Milgram Theorem, it is easy to prove the following elliptic regularity property :

$$\|y_\rho^2\|_{1,\omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho} \leq c \|k^2 y_\rho^1 + f\|_{0,\omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho} + c \|y_\rho^1\|_{\frac{1}{2},\Sigma_{\rho_1}}. \quad (4.37)$$

Gathering Equations (4.36) and (4.37) yields

$$\|y_\rho\|_{1,\omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho} \leq c\rho \|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}} + c \|f\|_{0,\omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho}$$

and

$$|A_\rho| \leq (c\rho \|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}} + c \|f\|_{0,\omega_{\rho_1} \setminus \bar{\omega}_\rho}) \|v\|_{1,\omega_{\rho_1} \setminus \omega_\rho}.$$

Consequently, we have

$$|a_0(\widehat{z_\rho|_{\Omega_{\rho_1}}}, v)| \leq (c\rho \|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}} + c \|f\|_{0,\Omega_\rho} + c \|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}) \|v\|_{1,\Omega}. \quad (4.38)$$

As Equation (4.38) holds for any $v \in H^1(\Omega)$, we obtain by using the first inf-sup condition of Proposition 4.2 that

$$\|\widehat{z_\rho|_{\Omega_{\rho_1}}}\|_{1,\Omega} \leq c\rho \|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}} + c \|f\|_{0,\Omega_\rho} + c \|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}.$$

Hence,

$$(1 - c\rho)\|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}} \leq c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}.$$

So, for ρ sufficiently small (possibly choosing ρ_2 in consequence),

$$\|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}} \leq c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}.$$

Using again Proposition 4.18 and the Lax Milgram Theorem, we obtain easily that

$$\|z_\rho\|_{1,\omega_{\rho_1} \setminus \omega_\rho} \leq c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|z_\rho\|_{1,\Omega_{\rho_1}},$$

which completes this long proof. For a crack, the argumentation should be similar, ω_{ρ_1} remaining a fixed domain containing the crack. We would have in this case $B_\rho = 0$. \square

Lemma 4.11 *Consider $\sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\rho \geq 0$, $g \in \mathcal{T}(\Sigma_\rho)$, $f \in L^2(\Omega_\rho)$ and let $z_\rho \in H^1(\Omega_\rho)$ be the solution to the problem*

$$\begin{cases} \Delta z_\rho + k^2 z_\rho = f & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n z_\rho = S z_\rho + \sigma & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n z_\rho = g & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases} \quad (4.39)$$

There exists some positive constants independent of ρ , σ , f and g such that for all ρ sufficiently small

$$\begin{aligned} \|z_\rho\|_{0,\Omega_\rho} &\leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)} + c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}, \\ |z_\rho|_{1,\Omega_\rho} &\leq c\rho \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)} + c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}, \\ \|z_\rho\|_{1,D_R} &\leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)} + c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}. \end{aligned}$$

This result remains true if we replace S by S^ and k by \bar{k} .*

Proof. We split z_ρ into $z_\rho = z_\rho^1 + z_\rho^2$ with

$$\begin{cases} \Delta z_\rho^1 = 0 & \text{in } \mathcal{U}_\rho, \\ z_\rho^1 = O(1/r) & \text{at } \infty, \\ \partial_n z_\rho^1 = g & \text{on } \Sigma_\rho, \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta z_\rho^2 + k^2 z_\rho^2 = -k^2 z_\rho^1 + f & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n z_\rho^2 = S z_\rho^2 + S z_\rho^1 - \partial_n z_\rho^1 + \sigma & \text{on } \Gamma, \\ \partial_n z_\rho^2 = 0 & \text{on } \Sigma_\rho. \end{cases}$$

By lemma 4.9,

$$\begin{aligned} \|z_\rho^1\|_{0,\Omega_\rho} &\leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}, \\ |z_\rho^1|_{1,\Omega_\rho} &\leq c\rho \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}, \\ \|z_\rho^1\|_{1,D_R} &\leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{\mathcal{T}(\Sigma)}, \end{aligned}$$

and by lemma 4.10,

$$\begin{aligned} \|z_\rho^2\|_{1,\Omega_\rho} &\leq c\| -k^2 z_\rho^1 + f \|_{0,\Omega_\rho} + c\|S z_\rho^1 - \partial_n z_\rho^1 + \sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leq c\|z_\rho^1\|_{0,\Omega_\rho} + c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|z_\rho^1\|_{1,D_R} + c\|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leq c\rho^2 \|g(\rho x)\|_{-\frac{1}{2},\Sigma} + c\|f\|_{0,\Omega_\rho} + c\|\sigma\|_{-\frac{1}{2},\Gamma}. \end{aligned}$$

The desired inequalities follow straightforwardly. \square

4.8.2 Proof of Theorem 4.5 (Topological asymptotic for a hole)

We will successively prove that $\mathcal{E}_i(\rho) = o(\rho^2)$ for all $i = 1, \dots, 6$.

1. We set $e_\rho = p_\rho - w_\rho$. We have, using basically the fact that u_0 is of class \mathcal{C}^∞ near the origin,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_1(\rho)| &= \left| \int_{\omega_\rho} \overline{\nabla l_\rho^{e_\rho}} \cdot \nabla u_0 dx \right| \\ &\leq |l_\rho^{e_\rho}|_{1, \omega_\rho} \|u_0\|_{1, \omega_\rho} \\ &\leq c\rho |l_\rho^{e_\rho}(\rho x)|_{1, \omega} \|u_0\|_{\mathcal{C}^1(\omega_\rho)} \\ &\leq c\rho |l^{e_\rho(\rho x)}|_{1, \omega} \\ &\leq c\rho \|e_\rho(\rho x)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)/\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Yet, the function e_ρ satisfies

$$\begin{cases} \Delta e_\rho + \bar{k}^2 e_\rho = \bar{k}^2 p_\rho & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n e_\rho = -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} + \partial_n v_0 & \text{on } \Sigma_\rho, \\ \partial_n e_\rho = S^* e_\rho + \partial_n p_\rho - S^* p_\rho & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

Hence, by Lemma 4.11,

$$\begin{aligned} |e_\rho|_{1, \Omega_\rho} &\leq c\rho \| -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} + \partial_n v_0(\rho x) \|_{-\frac{1}{2}, \Sigma} + c\|\bar{k}^2 p_\rho\|_{0, \Omega_\rho} + c\|\partial_n p_\rho - S^* p_\rho\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma} \\ &\leq c\rho \| -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} + \partial_n v_0(\rho x) \|_{-\frac{1}{2}, \Sigma} + c\|p_\rho\|_{0, \Omega_\rho} + c\|p_\rho\|_{1, D_R}. \end{aligned}$$

Using Equation (4.12) and the ellipticity of the Helmholtz operator, we obtain that there exists $\rho_3 > 0$ such that $v_0 \in H^3(\omega_{\rho_3}) \subset \mathcal{C}^1(\omega_{\rho_3})$. Thus, we have

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \| -\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n} + \partial_n v_0(\rho x) \|_{-\frac{1}{2}, \Sigma} = 0. \quad (4.40)$$

Thanks to Lemma 4.9,

$$\|p_\rho\|_{0, \Omega_\rho} + \|p_\rho\|_{1, D_R} \leq c\rho^2 \|\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2}, \Sigma} \leq c\rho^2.$$

Hence

$$|e_\rho|_{1, \Omega_\rho} = o(\rho).$$

Using successively the trace theorem, Lemma 4.14 (in the appendix) and a change of variable and denoting by B a ball containing ω , we obtain

$$\|e_\rho(\rho x)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)/\mathbb{C}} \leq c\|e_\rho(\rho x)\|_{H^1(B \setminus \bar{\omega})/\mathbb{C}} \leq c|e_\rho(\rho x)|_{1, B \setminus \bar{\omega}} = c|e_\rho|_{1, \Omega_\rho},$$

from which we deduce that $\mathcal{E}_1(\rho) = o(\rho^2)$.

2. The fact that, in a neighborhood of the origin, L is continuous and u_0 is of class \mathcal{C}^1 yields directly

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq c\rho^3,$$

3. We have

$$\mathcal{E}_3(\rho) = k^2 u_0(0) \int_{\omega_\rho} (\overline{v_0} - \overline{v_0(0)}) dx.$$

Since v_0 is of class \mathcal{C}^1 in a neighborhood of the origin, we obtain immediately with the help of a Taylor expansion that

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq c\rho^3.$$

4. We get by a change of variable

$$|\mathcal{E}_4(\rho)| = k^2 \rho^2 \left| \int_{\omega} u_0(\rho x) \overline{w_\rho(\rho x)} dx \right| \leq c\rho^2 \|w_\rho(\rho x)\|_{0,\omega}.$$

The elliptic regularity, the trace theorem and a change of variable bring successively

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_4(\rho)| &\leq c\rho^2 \|w_\rho(\rho x)\|_{\frac{1}{2},\Sigma} \\ &\leq c\rho^2 \|w_\rho(\rho x)\|_{1,\frac{1}{\rho}\Omega_\rho} \\ &\leq c\rho^2 \left(\frac{1}{\rho} \|w_\rho\|_{0,\Omega_\rho} + \|w_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \right). \end{aligned}$$

Then, Lemma 4.11 and the fact that v_0 is of class \mathcal{C}^1 in a neighborhood of the origin yield

$$|\mathcal{E}_4(\rho)| \leq c\rho^3 \|\partial_n v_0(\rho x)\|_{-\frac{1}{2},\Sigma} \leq c\rho^3.$$

5. We have

$$|\mathcal{E}_5(\rho)| \leq \rho \|\partial_n v_0(\rho x) - \nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\Sigma} \|u_0(\rho x) - u_0(0)\|_{\frac{1}{2},\Sigma}.$$

Using Equation (4.40) and the fact that u_0 is of class \mathcal{C}^∞ in a neighborhood of the origin, we obtain that $\mathcal{E}_5(\rho) = o(\rho^2)$.

6. We have

$$|\mathcal{E}_6(\rho)| \leq \rho \|\lambda\|_{-\frac{1}{2},\Sigma} \|u_0(\rho y) - u_0(0) - \nabla u_0(0) \cdot \rho y\|_{\frac{1}{2},\Sigma}.$$

With the help of a Taylor expansion, we obtain that

$$|\mathcal{E}_6(\rho)| \leq c\rho^3,$$

which achieves the proof of the theorem. \square

4.8.3 Proof of Theorem 4.6 (Topological asymptotic for a crack)

We have here to prove that $\mathcal{E}_i(\rho) = o(\rho^2)$ for all $i = 1, \dots, 3$.

1. Setting $e_\rho = p_\rho - w_\rho$, we have

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_1(\rho)| &\leq \rho \|\partial_n u_0(\rho x)\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))'} \| [e_\rho(\rho x)] \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \\ &\leq c\rho \| [e_\rho(\rho x)] \|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}. \end{aligned}$$

The function e_ρ is solution to

$$\begin{cases} \Delta e_\rho + \bar{k}^2 e_\rho = \bar{k}^2 p_\rho & \text{in } \Omega_\rho, \\ \partial_n e_\rho = 0 & \text{on } \Sigma_\rho, \\ \partial_n e_\rho = S^* e_\rho + \partial_n p_\rho - S^* p_\rho & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

Lemma 4.10 yields

$$\begin{aligned} \|e_\rho\|_{1,\Omega_\rho} &\leq c\|\bar{k}^2 p_\rho\|_{0,\Omega_\rho} + c\|\partial_n p_\rho - S^* p_\rho\|_{-\frac{1}{2},\Gamma} \\ &\leq c\|p_\rho\|_{0,\Omega_\rho} + c\|p_\rho\|_{1,D_R}. \end{aligned}$$

According to Lemma 4.9,

$$\|p_\rho\|_{0,\Omega_\rho} + \|p_\rho\|_{1,D_R} \leq c\rho^2 \|\partial_n u_0(\rho x)\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))'} \leq c\rho^2.$$

Thus

$$\|e_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq c\rho^2.$$

Using the trace theorem and Lemma 4.14 (in the appendix) and denoting by B a ball containing Σ , we have

$$\|[e_\rho(\rho x)]\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leq c\|e_\rho(\rho x)\|_{H^1(B \setminus \Sigma)/\mathbb{C}} \leq c|e_\rho(\rho x)|_{1,B \setminus \Sigma} = c|e_\rho|_{1,\Omega_\rho}.$$

Finally,

$$|\mathcal{E}_1(\rho)| \leq c\rho^3.$$

2. We have

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_2(\rho)| &\leq \rho^2 \|\partial_n u_0(\rho x)\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))'} \|\mu_\rho - \mu\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \\ &\leq c\rho^2 \|\mu_\rho - \mu\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}. \end{aligned}$$

By continuity of the operator T , we have

$$\|\mu_\rho - \mu\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} \leq c\|\partial_n v_0(\rho x) - \nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))'}.$$

Using Hypothesis 4.8, we obtain that v_0 is of class \mathcal{C}^1 in a neighborhood of the origin. Thus,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|\partial_n v_0(\rho x) - \nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))'} = 0 \quad (4.41)$$

and $\mathcal{E}_2(\rho) = o(\rho^2)$.

3. We have

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq \rho^2 \|\partial_n u_0(\rho x) - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma))'} \|\mu\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)}.$$

Next, as u_0 is of class \mathcal{C}^2 in a neighborhood of the origin,

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq c\rho^3.$$

This achieves the proof of the theorem. \square

4.8.4 Proof of Theorem 4.7 (Examples of cost functions)

We need the following preliminary lemma.

Lemma 4.12 *We have the estimates*

$$\|u_\rho - u_0\|_{0,\Omega_\rho} = O(\rho^2) \quad \text{and} \quad \|u_\rho - u_0\|_{1,D_R} = O(\rho^2).$$

Proof. It suffices to apply Lemma 4.11 to the function $u_\rho - u_0$ defined in Ω_ρ . \square

Let us now turn to the proof of Theorem 4.7.

1. For the first category of cost function, the result is an immediate application of Lemma 4.12.
2. For the second example, we present the argumentation for a perforation. The case of a crack may be deduced easily. We have

$$\begin{aligned} J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) &= \int_{\Omega_\rho} (|u_\rho - u_d|^2 - |u_0 - u_d|^2) dx - \int_{\omega_\rho} |u_0 - u_d|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_\rho} [|u_\rho - u_0|^2 + 2\Re(\overline{(u_0 - u_d)}(u_\rho - u_0))] dx - \int_{\omega_\rho} |u_0 - u_d|^2 dx. \end{aligned}$$

Lemma 4.11, the regularity of u_0 and u_d near the origin and the equality

$$L_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} 2\overline{(u_0 - u_d)} u dx \quad \forall u \in H^1(\Omega_\rho)$$

yield

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = \Re L_\rho(u_\rho - u_0) - \rho^2 \text{meas}(\omega) |u_0(0) - u_d(0)|^2 dx + o(\rho^2),$$

which achieves the proof.

4.9 Appendix

4.9.1 Proof of Proposition 4.2 (Well-posedness)

We need the following lemma which is a kind of generalization of the Poincaré inequality. We refer the reader to [26] for a very similar proof.

Lemma 4.13 *Let Ω be an open, bounded and connected subset of \mathbb{R}^n , whose boundary Γ is piecewise of class C^1 . Let V be a closed subspace of $H^1(\Omega)$ and $\|\cdot\|$ be a norm on V satisfying for all $u \in V$:*

$$|u|_{1,\Omega} \leq \|u\| \leq c|u|_{1,\Omega}.$$

Then, on V , the norm $\|\cdot\|$ is equivalent to the norm $|u|_{1,\Omega}$.

We will now prove Proposition 4.2.

1. First, let us prove that a_ρ^0 is coercive. For all $u \in H^1(\Omega_\rho)$, we have

$$a_\rho^0(u, u) = \|\nabla u\|_{0,\Omega_\rho}^2 - \int_\Gamma S_0 u \bar{u} ds. \tag{4.42}$$

Inequality (4.42), Hypothesis 4.4 and the continuity of a_ρ^0 yield,

$$|u|_{1,\Omega_\rho} \leq \sqrt{a_\rho^0(u, u)} \leq c_\rho \|u\|_{1,\Omega_\rho}.$$

Therefore, the coercivity of a_ρ^0 results from Lemma 4.13 if we prove that $u \mapsto \sqrt{a_\rho^0(u, u)}$ is a norm on $H^1(\Omega_\rho)$. It is obvious that the sesquilinear form a_ρ^0 is hermitian and positive. To prove that it is definite, let us assume that $a_\rho^0(u, u) = 0$. Inequality (4.42) implies $\|\nabla u\|_{0,\Omega_\rho} = 0$ and $\int_\Gamma S_0 u \bar{u} ds = 0$. Then, from Hypothesis 4.4 and the fact that Ω_ρ is connected, we obtain that $u = 0$ in Ω_ρ .

2. We will prove the first inf-sup condition and the existence of solution to Problem (4.2). For Problem (4.5) and the second inf-sup condition, the proofs should be analogous. From the Lax Milgram theorem and the fact that the embeddings $H^1(\Omega_\rho) \hookrightarrow L^2(\Omega_\rho)$ and $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ are compact, we obtain (see *e.g.* [27] for a detailed argumentation) that for all $u, v \in H^1(\Omega_\rho)$,

$$a_\rho(u, v) = a_\rho^0((I - C_\rho)u, v),$$

where C_ρ is a compact endomorphism of $H^1(\Omega_\rho)$. The Fredholm alternative and Hypothesis 4.5 imply that $I - C_\rho$ is bijective. Then, we deduce the existence of a solution to Problem (4.2). The inf-sup condition comes from the fact that for all $u \in H^1(\Omega_\rho)$

$$\begin{aligned} a_\rho(u, (I - C_\rho)u) &= a_\rho^0((I - C_\rho)u, (I - C_\rho)u) \\ &\geq c_\rho \|(I - C_\rho)u\|_{1,\Omega_\rho}^2 \\ &\geq c_\rho \|u\|_{1,\Omega_\rho} \|(I - C_\rho)u\|_{1,\Omega_\rho}. \end{aligned}$$

4.9.2 Solution of exterior Laplace problems

In this section, we gather some useful results about the solution of 2D exterior Laplace problems.

Quotient Sobolev spaces

Let \mathcal{V} be a complex Sobolev space on an open set Ω . The space \mathcal{V}/\mathbb{C} denotes the quotient space of \mathcal{V} by the constants. It is equipped with the following norm and semi-norm :

$$\|u\|_{\mathcal{V}/\mathbb{C}} = \inf_{v-u=C^{st}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad |u|_{\mathcal{V}/\mathbb{C}} = |u|_{\mathcal{V}}. \tag{4.43}$$

We assume that Ω is bounded and connected. The following standard result can be considered as a consequence of Lemma 4.13.

Lemma 4.14 *In the space $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$, the semi-norm is equivalent to the norm.*

A weighted Sobolev space

Let Ω be an open and bounded subset of \mathbb{R}^2 or a manifold of dimension 1 included in \mathbb{R}^2 and $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$. The space $W^1(\Omega')$ is defined by (see *e.g.* [17, 12]) :

$$W^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega'), \frac{u}{r \ln r} \in L^2(\Omega') \text{ and } \nabla u \in L^2(\Omega') \right\}.$$

It is equipped with the following norm and semi-norm :

$$\|u\|_{W^1(\Omega')} = \left[\left\| \frac{u}{r \ln r} \right\|_{L^2(\Omega')}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')}^2 \right]^{1/2}, \quad |u|_{W^1(\Omega')} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')}.$$

If Ω' is connected, we have (see [11]) :

Lemma 4.15 *In the space $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$, the semi-norm is equivalent to the norm.*

The Neumann problem for a hole

Let Ω be an open, bounded and connected subset of \mathbb{R}^2 such that $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ is connected. Its boundary Γ is supposed to be piecewise of class \mathcal{C}^1 . We are interested in the following problem.

$$\begin{cases} \Delta u' = 0 \text{ in } \Omega', \\ \partial_n u' = g \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (4.44)$$

We define the fundamental solution of the Laplace operator

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$$

and the space

$$H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \int_{\Gamma} u ds = 0 \right\}.$$

We recall the following classical theorem. We refer *e.g.* to [6] for an analogous proof in dimension 3.

Theorem 4.16 *Consider $g \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$.*

1. *Problem (4.44) admits a unique solution $u' \in W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ and the map $g \mapsto u'$ is linear and continuous from $H_0^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ into $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$.*
2. *The boundary integral equation : find $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$ such that*

$$\frac{\lambda(x)}{2} + \int_{\Sigma} \lambda(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y) = g(x) \quad \forall x \in \Gamma$$

has a unique solution. Moreover, the map $g \mapsto \lambda$ is a continuous automorphism of $H_0^{-1/2}(\Gamma)$.

3. *The single layer potential of density λ satisfies :*

$$\int_{\Gamma} \lambda(y) E(x-y) ds(y) = \begin{cases} u(x) & \text{if } x \in \Omega, \\ u'(x) & \text{if } x \in \Omega', \end{cases} \quad (4.45)$$

where u' denotes here a particular solution to Problem (4.44) and $u \in H^1(\Omega)$ verifies $\Delta u = 0$ in Ω .

4. We have the jump relations on the boundary Γ for the functions u and u' defined by (4.45) :

$$u' - u = 0 \quad \text{and} \quad \partial_n u' - \partial_n u = \lambda.$$

The Neumann problem for a crack

We consider a bounded manifold Σ of dimension 1. We are interested in the following problem.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma, \\ \partial_n u = g \text{ on } \Sigma. \end{cases} \quad (4.46)$$

We assume that $\bar{\Sigma} \subset \tilde{\Sigma}$, $\tilde{\Sigma}$ being a manifold of dimension 1 and of class \mathcal{C}^1 . We define the space (see [18])

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) = \left\{ u|_{\Sigma}, u \in H^{\frac{1}{2}}(\tilde{\Sigma}), \text{Supp}(u) \subset \bar{\Sigma} \right\}. \quad (4.47)$$

It is equipped with the norm

$$\|u|_{\Sigma}\|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Sigma)} = \|u\|_{\frac{1}{2}, \tilde{\Sigma}}.$$

We have the following theorem.

Theorem 4.17 Consider $g \in (H_{00}^{1/2}(\Sigma))'$.

1. Problem (4.46) admits a unique solution $u \in W^1(\Omega)/\mathbb{C}$ and the map $g \mapsto u$ is linear and continuous from $(H_{00}^{1/2}(\Sigma))'$ into $W^1(\Omega)/\mathbb{C}$.
2. A particular solution to Problem (4.46) is the double layer potential

$$u(x) = \int_{\Sigma} \mu(y) \partial_{n_y} E(x-y) ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma,$$

where $\mu = Tg$, T being an isomorphism from $(H_{00}^{1/2}(\Sigma))'$ into $H_{00}^{1/2}(\Sigma)$.

3. We have the jump relation across Σ (see Figure 4.1(b) for the orientation convention) :

$$[u] = u^+ - u^- = -\mu.$$

4. If Σ is linear (straight crack), then for all $\mu \in (H_{00}^{1/2} \cap \mathcal{C}^1)(\Sigma)$ and $\varphi \in \mathcal{D}(\Sigma)$

$$\langle T^{-1}\mu, \varphi \rangle = - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{d\mu}{ds}(x) \frac{d\varphi}{ds}(y) E(x-y) ds(x) ds(y).$$

Proof. The well-posedness of Problem (4.46) results from Lemma 4.15. To obtain the integral representation and the jump relation, it is very similar to what is presented in [12] for a manifold without boundary. The variational formulation of the integral equation for a straight crack has been obtained in [24]. \square

4.9.3 A Poincaré inequality for perforated domains

Let Ω be an open and bounded subset of \mathbb{R}^2 . We denote by Γ its boundary and by d its diameter. We consider an open set ω included in Ω and we denote $D = \Omega \setminus \bar{\omega}$. We suppose that there exists a cartesian coordinate system (x, y) and two functions f_1 and f_2 piecewise continuous on an interval I such that

$$\omega = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, f_1(x) < y < f_2(x)\}.$$

We consider the space

$$\mathcal{V} = \{u \in H^1(D), u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Then, the following inequality holds. As it will appear in the proof, this result would remain true if ω was replaced by a crack that can be represented as the graph of a continuous function.

Proposition 4.18 *We have for all $u \in \mathcal{V}$*

$$\|u\|_{0,D} \leq d|u|_{1,D}.$$

Proof. Consider $(x, y) \in D, y > 0$. We call $\Delta(x) = \{x\} \times \mathbb{R}$ and $h(x, y)$ the real number defined by

$$(x, h(x, y)) \in \Gamma \text{ and } \{x\} \times [y, h(x, y)] \subset \bar{D} \text{ (see Figure 4.3).}$$

We have

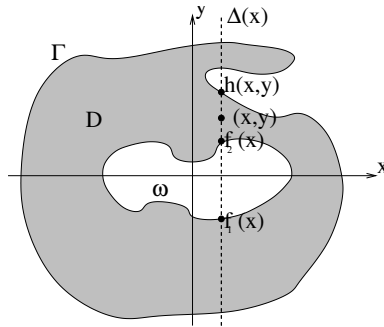


FIG. 4.3 – The perforated domain.

$$u(x, y) = \int_y^{h(x,y)} \partial_y u(x, y') dy'.$$

Obviously, we have an analogous result if $y < 0$. Therefore, for all $(x, y) \in D$,

$$|u(x, y)| \leq \left| \int_{\Delta(x) \cap D} \partial_y u(x, y') dy' \right|.$$

The Cauchy-Schwartz inequality yields

$$|u(x, y)|^2 \leq d \int_{\Delta(x) \cap D} |\partial_y u(x, y')|^2 dy'.$$

Hence,

$$\int_{\Delta(x) \cap D} |u(x, y)|^2 dy \leq d^2 \int_{\Delta(x) \cap D} |\partial_y u(x, y)|^2 dy.$$

We obtain the desired result by integrating with respect to x .

□

References

- [1] G. ALLAIRE, E. BONNETIER, G. FRANCFORT AND F. JOUVE, *Shape optimization by the homogenization method*, Technical report no. 337, Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique.
- [2] G. ALLAIRE AND R. KOHN, *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures*, European Journal of Mechanics, A/Solids, 12(6), pp. 839-878, 1993.
- [3] M. BENDSOE, *Optimal topology design of continuum structure : an introduction*. Technical report, Departement of mathematics, Technical University of Denmark, DK2800 Lyngby, Denmark, september 1996.
- [4] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.
- [5] J. CÉA, *Conception optimale ou identification de forme, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*, M.A.A.N., 20(3), pp. 371-402, 1986.
- [6] R. DAUTRAY AND J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, collection CEA, 1987.
- [7] A. FRIEDMAN AND M.S. VOGELIUS, *Identification of small inhomogeneities of extreme conductivity by boundary measurements : a theorem of continuous dependence*, Arch. Rational Mech. Anal. 105(4), pp. 299-326, 1989.
- [8] A. FRIEDMAN AND M.S. VOGELIUS, *Determining cracks by boundary measurements*, Indiana Univ. Math. J. 38(3), pp. 527-556, 1989.
- [9] R.R. GADYL'SHIN, *Existence and asymptotics of poles with a small imaginary part for the Helmholtz resonator*, Russian Math. Surveys, 52(1), pp. 1-72, 1997
- [10] S. GARREAU, PH. GUILLAUME AND M. MASMOUDI, *The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case*, SIAM J. Control Optim., 39(6), pp. 1756-1778, 2001.
- [11] J. GIROIRE, *Formulation variationnelle par équations intégrales de problèmes aux limites extérieurs*, Rapport interne du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, no.6, 1976.
- [12] J. GIROIRE AND J.-C. NÉDÉLEC, *Numerical solution of an exterior Neumann problem using a double layer potential*, Mathematics of computation, 32(144), pp. 973-990, 1978.
- [13] PH. GUILLAUME AND K. SIDIDRIS, *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem*, SIAM J. Control and Optim., 41(4), pp. 1042-1072, 2002.
- [14] PH. GUILLAUME AND K. SIDIDRIS, *Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations*, Rapport MIP no.01-24, 2001.

- [15] A.M. IL'IN, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Translations of mathematical monographs, Vol.102, 1992.
- [16] J. JACOBSEN, N. OLHOFF AND E. RONHOLT, *Generalized shape optimization of three-dimensional structures using materials with optimum microstructures*, Technical report, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, 1996.
- [17] M. JAOUA, *Equations intégrales pour un problème singulier dans le plan*, Thèse, Université Pierre et Marie Curie, 1977.
- [18] J.L. LIONS AND E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol.1, Dunod, 1968.
- [19] M. MASMOUDI, *Numerical Solution for Exterior Problems*, Numerische Mathematik, 51, pp. 87-101, Springer-Verlag, 1987.
- [20] M. MASMOUDI, *The Topological Asymptotic*, Computational Methods for Control Applications, R. Glowinski, H. Kawarada and J. Periaux eds., GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. Vol. 16, pp. 53-72, 2001.
- [21] V. MAZ'YA, S. NAZAROV AND B. PLAMENEVSKIJ, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, Operator theory, advances and applications, Vol. 101, Birkhäuser Verlag, 2000.
- [22] F. MURAT AND J. SIMON, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, PhD thesis, Paris, 1976.
- [23] S.A. NAZAROV AND J. SOKOLOWSKI, *Asymptotic analysis of shape functionals*, Technical report RR-4633, INRIA, 2002.
- [24] N. NISHIMURA AND S. KOBAYASHI, *A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection*, Int. J. Num. Methods Engrg. 32, pp. 1371-1387, 1991.
- [25] G. PÓLYA AND G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, Annals of Mathematical Studies no. 27, Princeton University Press, 1951.
- [26] P.-A. RAVIART AND J.-M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson 1988.
- [27] B. SAMET, S. AMSTUTZ AND M. MASMOUDI, *The topological asymptotic for the Helmholtz equation*, SIAM J. Control Optim. Vol. 42(5), pp. 1523-1544, 2003.
- [28] A. SCHUMACHER, V.V. KOBOLEV AND H.A. ESCHENAUER, *Bubble method for topology and shape optimization of structures*, Journal of structural optimization no. 8, pp. 42-51, 1994.
- [29] M. SHOENAUER, L. KALLEL AND F. JOUVE, *Mechanics inclusions identification by evolutionary computation*, Revue européenne des éléments finis, 5(5-6), pp. 619-648, 1996.
- [30] J. SOKOLOWSKI AND A. ZOCHOWSKI, *On the topological derivative in shape optimization*, SIAM J. Control Optim., 37, pp. 1241-1272, 1999.
- [31] E. TAROCO, *Shape sensitivity analysis in linear elastic fracture mechanics*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 188, pp. 697-712, 1999.

Chapitre 5

Equation de Helmholtz : insertion d'inhomogénéités diélectriques

Ce chapitre est une version préliminaire d'un projet de publication. Il s'agit d'un travail réalisé en collaboration avec Bessem Samet.

5.1 Introduction

The aim of the topological sensitivity analysis is to obtain an asymptotic expansion of a shape function with respect to the creation of a small hole inside the domain. The principle is the following. We consider a cost function $\mathcal{J}(\Omega) = J(\Omega, u_\Omega)$ where u_Ω is the solution to a partial differential equation defined in the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ or 3), a point $x_0 \in \Omega$ and a fixed domain $B \subset \mathbb{R}^d$, containing the origin. We search an asymptotic expansion of $\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{(x_0 + \varepsilon B)})$ when ε tends to 0. In most cases, it is of the form

$$\mathcal{J}(\Omega \setminus \overline{(x_0 + \varepsilon B)}) - \mathcal{J}(\Omega) = f(\varepsilon)G(x_0) + o(f(\varepsilon)). \quad (5.1)$$

Here, $f(\varepsilon)$ is an explicit positive function going to zero with ε and the function G , the “topological gradient” (or “topological derivative”), is in general easy to compute. We call Expansion (5.1) the “topological asymptotic”. Hence, to minimize the criterion \mathcal{J} , we just have to create small holes at some points \tilde{x} where the topological gradient is negative. For more details about this approach we refer the reader to S. Garreau et al. [10], Ph. Guillaume and K. Sididris [11], M. Masmoudi [12], A. Schumacher [15], A.A. Novotny et al. [13], J. Sokolowski and A. Żochowski [16]. In all these works, the authors are interested in only one way of perturbing the domain : the insertion of a hole.

Another situation, firstly considered by D.J. Cedio-Fengya, S. Moskow and M.S Vogelius [9], consists in perturbing the domain by the insertion of small inhomogeneities with constitutive parameters different from those of the background medium. In this paper, the authors are interested in the identification of conductivity imperfections by the use of boundary measurements. Other references can be found in [4, 3, 5, 2, 17, 6, 1]. In all these publications, only asymptotic formulas of solutions and of very particular cost functions are given.

In the present work, we combine both previous approaches. More precisely, we compute the topological asymptotic with respect to the insertion of small inhomogeneities in the domain. As a model example, we consider solutions to the Helmholtz equation in two and three dimensions. An adjoint method is used to obtain the expressions of $f(\varepsilon)$ and $G(x_0)$ (see Formula (5.1)) for a large class of shape functions. This method requires an asymptotic expansion of the solution. It is given in this case in [17].

The paper is organized as follows. In Section 5.2 we present the adjoint method. The Helmholtz problem in the presence of small inhomogeneities and the adjoint equation are presented in Section 5.3. In Section 5.4 we determine the expression of the topological asymptotic. Some particular cases of cost functions and of shape of inserted objects are presented in Section 5.5. The case of metallic objects is formally retrieved [7].

5.2 The adjoint method

Let \mathcal{V} be a complex Hilbert space. For all $\varepsilon \geq 0$, let a_ε be a sesquilinear and continuous form on \mathcal{V} and ℓ_ε be a semilinear and continuous form on \mathcal{V} . We assume that for all $\varepsilon \geq 0$, the problem

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in \mathcal{V} \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \ell_\varepsilon(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (5.2)$$

has one and only one solution. Consider now a cost function $j(\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geq 0$. We assume that, for all $\varepsilon \geq 0$, the function $J_\varepsilon : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ is differentiable on the real field at the point u_0 : there exists $L_\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathbb{C})$ such that

$$J_\varepsilon(u_0 + h) - J_\varepsilon(u_0) = \Re L_\varepsilon(h) + o(\|h\|_{\mathcal{V}}). \quad (5.3)$$

Suppose that the following hypotheses hold.

Hypothesis 5.1 *There exists two complex numbers δa and $\delta \ell$ and a function $f(\varepsilon) \geq 0$ such that*

$$(a_\varepsilon - a_0)(u_0, v_\varepsilon) = f(\varepsilon)\delta a + o(f(\varepsilon)), \quad (5.4)$$

$$(\ell_\varepsilon - \ell_0)(v_\varepsilon) = f(\varepsilon)\delta \ell + o(f(\varepsilon)), \quad (5.5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0, \quad (5.6)$$

where v_ε is the solution to

$$a_\varepsilon(u, v_\varepsilon) = -L_\varepsilon(u) \quad \forall u \in \mathcal{V}. \quad (5.7)$$

Hypothesis 5.2 *There exists two real numbers δJ_1 and δJ_2 such that*

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J_\varepsilon(u_0) + \Re L_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) + f(\varepsilon)\delta J_1 + o(f(\varepsilon)), \quad (5.8)$$

$$J_\varepsilon(u_0) = J_0(u_0) + f(\varepsilon)\delta J_2 + o(f(\varepsilon)). \quad (5.9)$$

It is supposed that, for all $\varepsilon \geq 0$, Problem (5.7) has one and only one solution. We call v_0 the adjoint state. We have the following result.

Theorem 5.1 *The variation of the cost function with respect to ε is given by*

$$j(\varepsilon) - j(0) = f(\varepsilon)\mathfrak{R}(\delta j) + o(f(\varepsilon)),$$

where $\delta j = \delta a - \delta \ell + \delta J$ and $\delta J = \delta J_1 + \delta J_2$.

Proof. We can write that

$$j(\varepsilon) - j(0) = [J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_0(u_0)] + \mathfrak{R}[a_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - a_0(u_0, v_\varepsilon)] - \mathfrak{R}[\ell_\varepsilon(v_\varepsilon) - \ell_0(v_\varepsilon)].$$

Using Hypothesis 5.1, we obtain that

$$\begin{aligned} j(\varepsilon) - j(0) &= [J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_0(u_0)] + \mathfrak{R}a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon) + f(\varepsilon)\mathfrak{R}(\delta a - \delta \ell) + o(f(\varepsilon)) \\ &= [J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_0)] + [J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0)] + \mathfrak{R}a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon) \\ &\quad + f(\varepsilon)\mathfrak{R}(\delta a - \delta \ell) + o(f(\varepsilon)). \end{aligned}$$

It follows from Hypothesis 5.2 that

$$j(\varepsilon) - j(0) = \mathfrak{R}[a_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0, v_\varepsilon) + L_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0)] + f(\varepsilon)\mathfrak{R}(\delta J_1 + \delta J_2 + \delta a - \delta \ell) + o(f(\varepsilon)).$$

Equation (5.7) yields the desired result. \square

5.3 Problem formulation

5.3.1 The Helmholtz problem

Let Ω be a bounded, smooth subdomain of \mathbb{R}^d , $d = 2$ or 3 . For simplicity we take $\partial\Omega$ to be \mathcal{C}^∞ , but this condition could be considerably weakened. We suppose that Ω contains a small inhomogeneity ω_ε of the form $\omega_\varepsilon = \varepsilon B$, where $B \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded, smooth (\mathcal{C}^∞) domain containing 0 (the origin) and ε is the order of magnitude of the diameter of the inhomogeneity. For $\varepsilon \geq 0$, let u_ε be the solution to the Helmholtz problem

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\alpha_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + \beta_\varepsilon u_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \Lambda u_\varepsilon + \sigma & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.10)$$

Here, $\Lambda \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$, $\sigma \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, \mathbf{n} denotes the outward unit normal to $\partial\Omega$ and α_ε is the piecewise constant function defined by

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} \alpha_0 & \text{if } x \in \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}, \\ \alpha_1 & \text{if } x \in \omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (5.11)$$

where α_0 and α_1 are positive constants. The piecewise constant function β_ε is defined analogously. The variational formulation associated to (5.10) reads

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H^1(\Omega) \\ a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases} \quad (5.12)$$

where, for all $u, v \in H^1(\Omega)$,

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, dx - \int_{\Omega} \beta_\varepsilon u \overline{v} \, dx - \alpha_0 \int_{\partial\Omega} (\Lambda u) \overline{v} \, ds, \quad (5.13)$$

$$\ell(v) = \alpha_0 \int_{\partial\Omega} \sigma \overline{v} \, ds. \quad (5.14)$$

In all the paper, the duality products between $H^{-1/2}$ and $H^{1/2}$ are denoted by an integral. We assume that the following hypotheses hold.

Hypothesis 5.3 *The operator Λ is split into $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1$ where*

– $\Lambda_0 \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$ and satisfies

$$\Re \int_{\partial\Omega} (\Lambda_0 \varphi) \overline{\varphi} \, ds(x) \leq 0 \quad \forall \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

– $\Lambda_1 \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))$.

Hypothesis 5.4 *For all $\varepsilon \geq 0$, we have*

$$\{a_\varepsilon(u, v) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)\} \implies u = 0, \quad (5.15)$$

$$\{a_\varepsilon(u, v) = 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega)\} \implies v = 0. \quad (5.16)$$

We have the following result that is proved in Section 5.6.

Proposition 5.2 *If Hypotheses 5.3 and 5.4 are satisfied, then for all $\varepsilon \geq 0$ Problem (5.12) has one and only one solution.*

5.3.2 The cost function and the adjoint problem

We consider a cost function $j(\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \geq 0$. We set $\mathcal{V} = H^1(\Omega)$ and we assume that J_ε is “ \mathbb{R} -differentiable” in the sense of Equation (5.3). Moreover, we suppose that Hypothesis 5.2 holds with $f(\varepsilon) = \varepsilon^d$ and that the linear form L_0 satisfies the following hypothesis.

Hypothesis 5.5 *The application L_0 , considered as a distribution, coincides in a neighborhood of the origin with a function of regularity H^2 . Furthermore,*

$$\|L_\varepsilon - L_0\|_{H^1(\Omega)'} = O(\varepsilon^{d/2}).$$

For all $\varepsilon \geq 0$, we define v_ε as the solution to the problem

$$\begin{cases} v_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ a_\varepsilon(w, v_\varepsilon) = -L_\varepsilon(w) \quad \forall w \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (5.17)$$

We have the following result (see Section 5.6).

Proposition 5.3 *If Hypotheses 5.3 and 5.4 are satisfied, then Problem (5.17) has one and only one solution.*

5.4 The main result

5.4.1 Preliminary estimates

Lemma 5.4 Consider $\varepsilon \geq 0$, $f \in H^1(\Omega)'$ and let u be the solution to

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ a_\varepsilon(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

There exists a constant c independent of ε and f such that

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^1(\Omega)'}$$

An identical result holds if we replace a_ε by a_ε^* defined by $a_\varepsilon^*(u, v) = a_\varepsilon(v, u) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$.

Proof. We refer to [17] for an analogous proof, presented in the case of a Dirichlet condition on $\partial\Omega$. It is based on the theory of collectively compact operators and its adaptation to our context requires no major modification. \square

Lemma 5.5 We have

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{d/2}), \quad (5.18)$$

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{d/2}), \quad (5.19)$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega \setminus \overline{B(0, R)})} = O(\varepsilon^d), \quad (5.20)$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon})} = O(\varepsilon^d), \quad (5.21)$$

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{d}{2}+1-\delta}), \quad (5.22)$$

where R denotes any fixed radius such that $\overline{B(0, R)} \subset \Omega$, $\delta = 0$ in $3D$, $\delta > 0$ in $2D$.

Proof.

1. We set $X_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$. From Equation (5.12), we obtain immediately that

$$a_\varepsilon(X_\varepsilon, \varphi) = -(a_\varepsilon - a_0)(u_0, \varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (5.23)$$

Yet, according to (5.13) and (5.11),

$$(a_\varepsilon - a_0)(u_0, \varphi) = \int_{\omega_\varepsilon} [(\alpha_1 - \alpha_0)\nabla u_0 \cdot \overline{\nabla \varphi} - (\beta_1 - \beta_0)u_0 \overline{\varphi}] dx.$$

Using that u_0 is of class \mathcal{C}^2 in a neighborhood of the origin, we obtain that

$$|(a_\varepsilon - a_0)(u_0, \varphi)| \leq c\varepsilon^{d/2} \|\varphi\|_{1, \Omega}. \quad (5.24)$$

Then, Lemma 5.4 together with Equations (5.23) and (5.24) yield

$$\|X_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq c\varepsilon^{d/2}.$$

2. To prove the second inequality, we set $w_\varepsilon = v_\varepsilon - v_0$ and we deduce from Equation (5.17) that

$$a_\varepsilon^*(w_\varepsilon, \varphi) = -(a_\varepsilon - a_0)(\varphi, v_0) - (L_\varepsilon - L_0)(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

The fact that v_0 is of class \mathcal{C}^2 in a neighborhood of the origin and Hypothesis 5.5 yield

$$|a_\varepsilon^*(w_\varepsilon, \varphi)| \leq c\varepsilon^{d/2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

We conclude by using Lemma 5.4.

3. To obtain the third and the fourth inequalities, we observe that the function $X_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ verifies :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\alpha_0 \nabla X_\varepsilon) + \beta_0 X_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}, \\ \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} = \Lambda X_\varepsilon & \text{on } \partial\Omega, \\ \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} = \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} & \text{on } \partial\omega_\varepsilon. \end{array} \right.$$

It is proved in [7] that, in these conditions,

$$\|X_\varepsilon\|_{H^1(\Omega \setminus \overline{B(0,R)})} + \|X_\varepsilon\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon})} \leq c\varepsilon^d \left\| \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n}(\varepsilon x) \right\|_{H^{-1/2}(\partial B)}. \quad (5.25)$$

Again, in this reference, the proof is given in 2D but the generalization to the 3D case presents no difficulties. Then, standard properties of the normal derivative and a change of variable yield successively

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n}(\varepsilon x) \right\|_{H^{-1/2}(\partial B)} &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial (X_\varepsilon(\varepsilon x))}{\partial n} \right\|_{H^{-1/2}(\partial B)} \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon} |X_\varepsilon(\varepsilon x)|_{H^1(\frac{1}{\varepsilon}\Omega \setminus \overline{B})} + c\varepsilon \|\Delta X_\varepsilon(\varepsilon x)\|_{L^2(\frac{1}{\varepsilon}\Omega \setminus \overline{B})} \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon} |X_\varepsilon(\varepsilon x)|_{H^1(\frac{1}{\varepsilon}\Omega \setminus \overline{B})} + c\varepsilon \|X_\varepsilon(\varepsilon x)\|_{L^2(\frac{1}{\varepsilon}\Omega \setminus \overline{B})} \\ &\leq \varepsilon^{-d/2} |X_\varepsilon|_{H^1(\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon})} + c\varepsilon^{1-d/2} \|X_\varepsilon\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon})} \\ &\leq \varepsilon^{-d/2} \|X_\varepsilon\|_{H^1(\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon})}. \end{aligned}$$

Combining this latter inequality with (5.25) and (5.18) provides (5.20) and (5.21)

4. Let us now turn to the last inequality. Thanks to (5.21), it only remains to prove that $\|X_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\frac{d}{2}+1-\delta})$. For any positive numbers p and q such that $1/p + 1/q = 1$, the Hölder inequality brings

$$\|X_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq c\varepsilon^{\frac{d}{2q}} \|X_\varepsilon\|_{L^{2p}(\omega_\varepsilon)}. \quad (5.26)$$

Next, the Sobolev imbedding theorem provides

$$\|X_\varepsilon\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq c \|X_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \quad (5.27)$$

for $p = 3$ in 3D and $p < +\infty$ in 2D. These values correspond to a choice of q such that $d/q = 2$ in 3D and $d/q < 2$ in 2D. The desired inequality is obtained by a combination of Equations (5.26), (5.27) and (5.18).

□

5.4.2 Variation of the sesquilinear form

Here, our aim is to determine δa , $\delta \ell$ and $f(\varepsilon)$ such that Hypothesis 5.1 holds. The sesquilinear form ℓ defined in (5.14) is independent of ε . Then, we have

$$\delta \ell = 0. \tag{5.28}$$

The determination of δa starts from the fact that

$$(a_\varepsilon - a_0)(u_0, v_\varepsilon) = (\alpha_1 - \alpha_0) \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v_\varepsilon} \, dx - (\beta_1 - \beta_0) \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{v_\varepsilon} \, dx. \tag{5.29}$$

Denoting $w_\varepsilon = v_\varepsilon - v_0$, we obtain

$$\begin{aligned} (a_\varepsilon - a_0)(u_0, v_\varepsilon) &= (\alpha_1 - \alpha_0) \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla w_\varepsilon} \, dx + (\alpha_1 - \alpha_0) \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v_0} \, dx \\ &\quad - (\beta_1 - \beta_0) \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{w_\varepsilon} \, dx - (\beta_1 - \beta_0) \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{v_0} \, dx. \end{aligned}$$

The Green formula yields

$$\begin{aligned} (a_\varepsilon - a_0)(u_0, v_\varepsilon) &= (\alpha_1 - \alpha_0) \left[\int_{\partial \omega_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial n} \overline{w_\varepsilon} \, ds + \int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v_0} \, dx \right] \\ &\quad - (\beta_1 - \beta_0) \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{v_0} \, dx + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0} \beta_0 - \beta_1 \right) \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{w_\varepsilon} \, dx. \end{aligned} \tag{5.30}$$

To obtain the first order expression of this quantity, we need the following lemmas.

Lemma 5.6 *We have*

$$\int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{w_\varepsilon} \, dx = o(\varepsilon^d).$$

Proof. We have that

$$\left| \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{w_\varepsilon} \, dx \right| \leq \|u_0\|_{L^\infty(\omega_\varepsilon)} \int_{\omega_\varepsilon} |w_\varepsilon| \, dx.$$

From the Hölder inequality, we obtain that for all $p, q \in [1, +\infty]$ satisfying $1/p + 1/q = 1$,

$$\left| \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{w_\varepsilon} \, dx \right| \leq c \varepsilon^{d/p} \|w_\varepsilon\|_{L^q(\omega_\varepsilon)}.$$

We choose $p = 3/2$ and $q = 3$. It follows from the Sobolev imbedding theorem that $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ with a continuous imbedding. Hence,

$$\left| \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{w_\varepsilon} \, dx \right| \leq c \varepsilon^{d/p} \|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}.$$

According to Lemma 5.5, $\|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{d/2})$. Therefore,

$$\left| \int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{w_\varepsilon} \, dx \right| \leq c \varepsilon^{7d/6}.$$

□

Lemma 5.7 *We have the following estimate.*

$$\int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{v_0} \, dx = \varepsilon^d |B| u_0(0) \cdot \overline{v_0(0)} + o(\varepsilon^d).$$

Proof. We can write

$$\int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{v_0} \, dx = \varepsilon^d |B| u_0(0) \cdot \overline{v_0(0)} + \int_{\omega_\varepsilon} [u_0 \cdot \overline{v_0} - u_0(0) \cdot \overline{v_0(0)}] \, dx.$$

We obtain by a change of variable that

$$\int_{\omega_\varepsilon} [u_0 \cdot \overline{v_0} - u_0(0) \cdot \overline{v_0(0)}] \, dx = \varepsilon^d \int_B [u_0(\varepsilon y) \cdot \overline{v_0(\varepsilon y)} - u_0(0) \cdot \overline{v_0(0)}] \, dy.$$

By the Taylor expansion, using that v_0 is of class C^∞ in a neighborhood of the origin, we obtain

$$\int_B [u_0(\varepsilon y) \cdot \overline{v_0(\varepsilon y)} - u_0(0) \cdot \overline{v_0(0)}] \, dy = O(\varepsilon).$$

Hence,

$$\int_{\omega_\varepsilon} u_0 \cdot \overline{v_0} \, dx = \varepsilon^d |B| u_0(0) \cdot \overline{v_0(0)} + O(\varepsilon^{d+1}).$$

□

In a similar manner, we prove the following estimate.

Lemma 5.8

$$\int_{\omega_\varepsilon} \nabla u_0 \cdot \overline{\nabla v_0} \, dx = \varepsilon^d |B| \nabla u_0(0) \cdot \overline{\nabla v_0(0)} + o(\varepsilon^d).$$

We introduce now the function Φ solution to

$$\begin{cases} \Delta \Phi = 0 \text{ in } B \text{ and } \mathbb{R}^d \setminus \overline{B}, \\ \Phi \text{ is continuous across } \partial B, \\ \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^+ - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^- = -\mathbf{n}, \\ \lim_{|y| \rightarrow \infty} |\Phi(y)| = 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

Here, \mathbf{n} denotes the outward unit normal to ∂B ; superscript $+$ and $-$ indicate the limiting values as we approach ∂B from outside B , and from inside B , respectively. We have the following result.

Lemma 5.9 *We have the following estimate.*

$$\int_{\partial \omega_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial n} \overline{w_\varepsilon} \, ds = \varepsilon^d \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - 1 \right) \nabla u_0(0)^T \left[\int_{\partial B} \mathbf{n} \otimes \Phi(y) \, ds(y) \right] \overline{\nabla v_0(0)} + o(\varepsilon^d),$$

where \otimes denotes the tensorial product between two vectors, that is,

$$U \otimes V = (U_i V_j)_{1 \leq i, j \leq d} \quad \forall U, V \in \mathbb{R}^d.$$

Proof. We can write

$$\int_{\partial\omega_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial n} \overline{w_\varepsilon} \, ds = \int_{\partial\omega_\varepsilon} \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} \overline{w_\varepsilon} \, ds + \int_{\partial\omega_\varepsilon} [\nabla u_0(x) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}] \overline{w_\varepsilon} \, ds. \quad (5.32)$$

By a change of variable we obtain

$$\int_{\partial\omega_\varepsilon} [\nabla u_0(x) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}] \overline{w_\varepsilon} \, ds(x) = \varepsilon^{d-1} \int_{\partial B} [\nabla u_0(\varepsilon y) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}] \overline{w_\varepsilon(\varepsilon y)} \, ds(y).$$

We have

$$\left| \int_{\partial B} [\nabla u_0(\varepsilon y) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}] \overline{w_\varepsilon(\varepsilon y)} \, ds(y) \right| \leq c \|(\nabla u_0(\varepsilon y) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n})\|_{-\frac{1}{2}, \partial B} \|w_\varepsilon(\varepsilon y)\|_{\frac{1}{2}, \partial B}.$$

A Taylor expansion, the trace theorem and a change of variable yield

$$\left| \int_{\partial B} [\nabla u_0(\varepsilon y) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}] \overline{w_\varepsilon(\varepsilon y)} \, ds(y) \right| \leq c\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^{d/2}} \|w_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{1-d/2} |w_\varepsilon|_{1, \omega_\varepsilon} \right).$$

Yet, using the Hölder inequality, we obtain that for all $p, q \in [1, +\infty]$ with $1/p + 1/q = 1$,

$$\|w_\varepsilon\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \leq \varepsilon^{d/2q} \|w_\varepsilon\|_{L^{2p}(\omega_\varepsilon)}.$$

We choose $p = 3$ and $q = 3/2$. Using that, by Lemma 5.5, $\|w_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{d/2})$ and the Sobolev imbedding theorem, we obtain

$$\left| \int_{\partial B} [\nabla u_0(\varepsilon y) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}] \overline{w_\varepsilon(\varepsilon y)} \, ds(y) \right| \leq c\varepsilon(\varepsilon^{d/3} + \varepsilon).$$

Then,

$$\int_{\partial\omega_\varepsilon} [\nabla u_0(x) \cdot \mathbf{n} - \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}] \overline{w_\varepsilon} \, ds(x) = o(\varepsilon^d). \quad (5.33)$$

In [17], it is proved that for all $y \in \partial B$,

$$\overline{w_\varepsilon(\varepsilon y)} = \varepsilon \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - 1 \right) \Phi(y) \cdot \overline{\nabla v_0(0)} + R_\varepsilon(y), \quad (5.34)$$

where

$$\|R_\varepsilon(y)\|_{C(\partial\omega)} = \begin{cases} O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon) & \text{if } d = 2, \\ O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}) & \text{if } d = 3. \end{cases} \quad (5.35)$$

In this paper, the proof is presented in 2D only but the 3D case is obtained by following exactly the same principle. The only thing to be changed is the fundamental solution of the Laplace operator. Using a change of variable, (5.34) and (5.35), we obtain that

$$\int_{\partial\omega_\varepsilon} \nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n} \overline{w_\varepsilon} \, ds = \varepsilon^d \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - 1 \right) \nabla u_0(0)^T \left[\int_{\partial B} \mathbf{n} \otimes \Phi(y) \, ds(y) \right] \overline{\nabla v_0(0)} + o(\varepsilon^d). \quad (5.36)$$

From (5.32), (5.33) and (5.36) we deduce the desired result. \square

It follows from (5.30), Lemmas 5.6, 5.7, 5.8 and 5.9 that the following proposition holds.

Proposition 5.10 *We have*

$$(a_\varepsilon - a_0)(u_0, v_\varepsilon) = \varepsilon^d (\alpha_1 - \alpha_0) \nabla u_0(0)^T \left[\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - 1 \right) \int_{\partial B} \mathbf{n} \otimes \Phi(y) ds(y) + |B|I \right] \overline{\nabla v_0(0)} \\ + \varepsilon^d (\beta_0 - \beta_1) |B| u_0(0) \overline{v_0(0)} + o(\varepsilon^d).$$

Then, Hypothesis 5.1 is satisfied with $f(\varepsilon) = \varepsilon^d$ and

$$\delta a = (\alpha_1 - \alpha_0) \nabla u_0(0)^T \left[\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - 1 \right) \int_{\partial B} \mathbf{n} \otimes \Phi(y) ds(y) + |B|I \right] \overline{\nabla v_0(0)} \\ + (\beta_0 - \beta_1) |B| u_0(0) \overline{v_0(0)}.$$

5.4.3 The topological asymptotic expansion

Provided that the cost function satisfies Hypothesis 5.2 (see Section 5.5.1 for some examples), all the assumptions of the adjoint method are checked and the topological asymptotic expansion is given by Theorem 5.1. We obtain the following result.

Theorem 5.11 *The cost function j has the following asymptotic expansion :*

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^d \Re \left\{ (\alpha_1 - \alpha_0) \nabla u_0(0)^T (P + |B|I) \overline{\nabla v_0(0)} - (\beta_1 - \beta_0) |B| u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta J \right\} + o(\varepsilon^d).$$

with

$$P = \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - 1 \right) \int_{\partial B} \mathbf{n} \otimes \Phi(y) ds(y). \quad (5.37)$$

This matrix P only depends on the shape of B and on the ratio α_0/α_1 .

5.5 Particular cases

5.5.1 Particular cost functions

Our goal here is to check Hypotheses 5.2 and 5.5 for some examples of cost function.

Theorem 5.12 *We consider three cases.*

1. **First example.** *We denote $D_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$, R being a fixed radius such that $\overline{B(0, R)} \subset \Omega$. We consider a cost function of the form : $j(\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) = J(u_\varepsilon|_{D_R})$. We assume that there exists L , a linear and continuous form on $H^1(D_R)$ such that*

$$J(u_{0|D_R} + h) = J(u_{0|D_R}) + \Re(L(h)) + o(\|h\|_{1, D_R}) \quad \forall h \in H^1(D_R).$$

Then, Hypotheses 5.2 and 5.5 are satisfied with

$$L_\varepsilon(u) = L(u|_{D_R}) \quad \forall u \in H^1(\Omega), \forall \varepsilon \geq 0$$

and

$$\delta J_1 = \delta J_2 = 0.$$

2. **Second example.** It consists in the cost function

$$j(\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_\Omega \alpha_\varepsilon |u_\varepsilon - u_d|^2 dx,$$

where $u_d \in H^2(\Omega)$. Hypotheses 5.2 and 5.5 are satisfied with

$$L_\varepsilon(u) = 2 \int_\Omega \alpha_\varepsilon u \cdot \overline{(u_0 - u_d)} dx \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\delta J_1 = 0,$$

$$\delta J_2 = (\alpha_1 - \alpha_0) |B| |u_0(0) - u_d(0)|^2.$$

3. **Third example.** It consists in the cost function

$$j(\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_\Omega \alpha_\varepsilon |\nabla(u_\varepsilon - u_d)|^2 dx,$$

where $u_d \in H^3(\Omega)$. Hypotheses 5.2 and 5.5 are satisfied with

$$L_\varepsilon(u) = 2 \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla u \cdot \overline{\nabla(u_0 - u_d)} dx \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

$$\delta J_1 = (\alpha_1 - \alpha_0) \nabla u_0(0)^T P \overline{\nabla u_0(0)},$$

$$\delta J_2 = (\alpha_1 - \alpha_0) |B| |\nabla u_0(0) - \nabla u_d(0)|^2,$$

where P is the matrix defined by (5.37).

For the proof, we need the following lemmas.

Lemma 5.13

$$\int_\Omega \alpha_\varepsilon |u_\varepsilon - u_0|^2 dx = o(\varepsilon^d).$$

Proof. We have

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha_\varepsilon |u_\varepsilon - u_0|^2 dx &= \alpha_0 \int_{\Omega \setminus \omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - u_0|^2 dx + \alpha_1 \int_{\omega_\varepsilon} |u_\varepsilon - u_0|^2 dx \\ &\leq c \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

The result is then a consequence of Lemma 5.5. □

Lemma 5.14 We have

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{\nabla(u_\varepsilon - u_0)} dx \\ &= -\varepsilon^d \frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{\alpha_1} \nabla u_0(0)^T \left(\int_{\partial B} \mathbf{n} \otimes \Phi(y) ds(y) \right) \overline{\nabla u_0(0)} + o(\varepsilon^d). \end{aligned}$$

Proof. We denote $X_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$. We have

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{\nabla(u_\varepsilon - u_0)} dx = \int_{\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}} \alpha_0 \nabla X_\varepsilon \cdot \overline{\nabla X_\varepsilon} dx + \int_{\omega_\varepsilon} \alpha_1 \nabla X_\varepsilon \cdot \overline{\nabla X_\varepsilon} dx.$$

Thanks to the Green formula, we obtain

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{\nabla(u_\varepsilon - u_0)} dx \\ &= \alpha_0 \left[- \int_{\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}} \Delta X_\varepsilon \cdot \overline{X_\varepsilon} dx - \int_{\partial \omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} \right)^+ \overline{X_\varepsilon} ds + \int_{\partial \Omega} \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} \overline{X_\varepsilon} ds \right] \\ &+ \alpha_1 \left[- \int_{\omega_\varepsilon} \Delta X_\varepsilon \cdot \overline{X_\varepsilon} dx + \int_{\partial \omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} \right)^- \overline{X_\varepsilon} ds \right]. \end{aligned}$$

By Lemmas 5.5 and 5.13 and using that $\Delta X_\varepsilon = -\frac{\beta_0}{\alpha_0} X_\varepsilon$ in $\Omega \setminus \overline{\omega_\varepsilon}$, we obtain

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{\nabla(u_\varepsilon - u_0)} dx = \int_{\omega_\varepsilon} \left[\alpha_\varepsilon \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} \right] \overline{X_\varepsilon} ds + o(\varepsilon^d),$$

where

$$\left[\alpha_\varepsilon \frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} \right] = \int_{\omega_\varepsilon} \left(\alpha_1 \left(\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} \right)^- - \alpha_0 \left(\frac{\partial X_\varepsilon}{\partial n} \right)^+ \right) \overline{X_\varepsilon} ds.$$

Yet,

$$\left[\alpha_\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right] = 0,$$

which yields

$$\int_{\Omega} \alpha_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{\nabla(u_\varepsilon - u_0)} dx = (\alpha_1 - \alpha_0) \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial u_0}{\partial n} \overline{X_\varepsilon} ds + o(\varepsilon^d).$$

From Lemma 5.9, remaining true if we replace w_ε by X_ε and v_0 by u_0 , we obtain the desired result. \square

Proof of Theorem 5.12. The proof is successively presented for the three cases.

1. It is an immediate consequence of Lemma 5.5.
2. - *Expression of $J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_0)$.* We have that

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_0) = \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon |u_\varepsilon - u_0|^2 dx + 2\Re \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon (u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{(u_0 - u_d)} dx. \quad (5.38)$$

Using (5.38) and Lemma 5.13 we obtain that

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_0) = \Re L_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon^d \delta J_1 + o(\varepsilon^d),$$

where

$$L_\varepsilon(u) = 2 \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon u \cdot \overline{(u_0 - u_d)} dx \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

and

$$\delta J_1 = 0.$$

– *Expression of $J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0)$.* We have that

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0) &= \int_\Omega \alpha_\varepsilon |u_0 - u_d|^2 dx - \alpha_0 \int_\Omega |u_0 - u_d|^2 dx \\ &= (\alpha_1 - \alpha_0) \int_{\omega_\varepsilon} |u_0 - u_d|^2 dx. \end{aligned}$$

By using a Taylor expansion and a change of variable we can prove that

$$\int_{\omega_\varepsilon} |u_0 - u_d|^2 dx = |B| \varepsilon^d |u_0(0) - u_d(0)|^2 + o(\varepsilon^d).$$

Then, the expression of $J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0)$ is given by

$$J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0) = \varepsilon^d \delta J_2 + o(\varepsilon^d),$$

where

$$\delta J_2 = (\alpha_1 - \alpha_0) |B| |u_0(0) - u_d(0)|^2.$$

Then we are proved that Hypothesis 5.1 is satisfied.

– *Estimation of $\|L_\varepsilon - L_0\|_{H^1(\Omega)'$.* We have for all $\varphi \in H^1(\Omega)$

$$(L_\varepsilon - L_0)(\varphi) = 2(\alpha_1 - \alpha_0) \int_{\omega_\varepsilon} \varphi(\overline{u_0 - u_d}) dx.$$

The Schwarz inequality and the fact that u_0 and u_d are continuous in a neighborhood of the origin yield successively, for ε sufficiently small,

$$\begin{aligned} |(L_\varepsilon - L_0)(\varphi)| &\leq c \|\varphi\|_{L^2(\omega_\rho)} \|u_0 - u_d\|_{L^2(\omega_\rho)} \\ &\leq c \varepsilon^{d/2} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

This proves that Hypothesis 5.5 holds.

3. – *Expression of $J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_0)$.* We have that

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_0) &= \int_\Omega \alpha_\varepsilon |\nabla(u_\varepsilon - u_d)|^2 dx - \int_\Omega \alpha_\varepsilon |\nabla(u_0 - u_d)|^2 dx \\ &= \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{\nabla(u_\varepsilon - u_0)} dx \\ &\quad + 2\Re \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \overline{\nabla(u_0 - u_d)} dx. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Using Lemma 5.14 and Equation (5.39) we obtain that

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) - J_\varepsilon(u_0) = \Re L_\varepsilon(u_\varepsilon - u_0) + \varepsilon^d \delta J_1 + o(\varepsilon^d),$$

where

$$L_\varepsilon(u) = 2 \int_\Omega \alpha_\varepsilon \nabla u \cdot \overline{\nabla(u_0 - u_d)} dx \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

and

$$\delta J_1 = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{\alpha_1} \nabla u_0(0)^T \left(\int_{\partial B} \mathbf{n} \otimes \Phi(y) ds(y) \right) \overline{\nabla u_0(0)}.$$

– *Expression of $J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0)$.* We have that

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0) &= \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon |\nabla(u_0 - u_d)|^2 dx - \int_{\Omega} \alpha_0 |\nabla(u_0 - u_d)|^2 dx \\ &= (\alpha_1 - \alpha_0) \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla(u_0 - u_d)|^2 dx. \end{aligned}$$

Using a Taylor expansion and a change of variable, we can prove that

$$\int_{\omega_\varepsilon} |\nabla(u_0 - u_d)|^2 dx = \varepsilon^d |B| |\nabla u_0(0) - \nabla u_d(0)|^2 + o(\varepsilon^d).$$

Then, we obtain

$$J_\varepsilon(u_0) - J_0(u_0) = \varepsilon^d \delta J_2 + o(\varepsilon^d),$$

where

$$\delta J_2 = (\alpha_1 - \alpha_0) |B| |\nabla u_0(0) - \nabla u_d(0)|^2.$$

Then we are proved that Hypothesis 5.1 is satisfied.

– *Estimation of $\|L_\varepsilon - L_0\|_{H^1(\Omega)}$.* It is very similar to the second example. □

5.5.2 Particular shaped dielectric objects

When B is the unit ball, we can explicitly determine Φ , the solution to Problem (5.31). In this special case we have

$$\Phi(y) = \frac{1}{(d-1)\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + 1} \times \begin{cases} y & \text{in } B, \\ \frac{y}{|y|^d} & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \overline{B}. \end{cases} \quad (5.40)$$

Using Theorem 5.11 and (5.40) we obtain the following result.

Corollary 5.15 (ball) *If B is the unit ball, the matrix P of Theorem 5.11 reads*

$$P = \frac{\alpha_0 - \alpha_1}{(d-1)\alpha_0 + \alpha_1} |B| I$$

and the function j has the following asymptotic expansion :

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^d \Re \left\{ \frac{d\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_0)}{(d-1)\alpha_0 + \alpha_1} |B| \nabla u_0(0) \cdot \overline{\nabla v_0(0)} - (\beta_1 - \beta_0) |B| u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta J \right\} + o(\varepsilon^d).$$

We now consider the case where B is an ellipse. We have the following result.

Corollary 5.16 (ellipse) *If B is an ellipse whose semi-major axis is of length a , and whose semi-minor axis is of length b (2D problem), the matrix P reads*

$$P = \pi ab (\alpha_0 - \alpha_1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_0 a + \alpha_1 b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_0 b + \alpha_1 a} \end{pmatrix}$$

and the function j has the following asymptotic expansion :

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^2 \Re \left\{ (\alpha_1 - \alpha_0) \nabla u_0(0)^T P' \overline{\nabla v_0(0)} - (\beta_1 - \beta_0) \pi a b u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta J \right\} + o(\varepsilon^2),$$

with

$$P' = \pi a b \begin{pmatrix} \frac{\alpha_0(1+a) + \alpha_1(b-1)}{\alpha_0 a + \alpha_1 b} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_0(1+b) + \alpha_1(a-1)}{\alpha_0 b + \alpha_1 a} \end{pmatrix}.$$

For the expression of the function Φ we refer the reader to [8].

5.5.3 Metallic objects

Setting $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\beta_1 \rightarrow 0$, $\alpha_0 = 1$ and $\beta_0 = k^2$, we obtain formally from Corollary 5.15 and Corollary 5.16 the following results.

Corollary 5.17 (ball) *If B is the unit ball and ω_ε is a hole with $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0$ on $\partial\omega_\varepsilon$, we obtain*

$$P = \frac{1}{d-1} |B| I$$

and

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^d \Re \left\{ \frac{-d}{d-1} |B| \nabla u_0(0) \cdot \overline{\nabla v_0(0)} + |B| k^2 u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta J \right\} + o(\varepsilon^d).$$

Corollary 5.18 (ellipse) *If B is an ellipse whose semi-major axis is of length a , and whose semi-minor axis is of length b , ω_ε is a hole and $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0$ on $\partial\omega_\varepsilon$, we obtain*

$$P = \pi \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

and

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^2 \Re \left\{ -\nabla u_0(0)^T P' \overline{\nabla v_0(0)} + \pi a b k^2 u_0(0) \overline{v_0(0)} + \delta J \right\} + o(\varepsilon^2),$$

with

$$P' = \pi \begin{pmatrix} (a+1)b & 0 \\ 0 & (b+1)a \end{pmatrix}.$$

Setting $b \rightarrow 0$, we obtain formally from Corollary 5.18 the following result.

Corollary 5.19 (straight crack) *If B is the segment $[-a, a] \times \{0\}$ and $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0$ on $\partial\omega_\varepsilon$, we obtain that*

$$j(\varepsilon) - j(0) = \varepsilon^2 \Re \left(-\pi a (\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n}) (\overline{\nabla v_0(0) \cdot \mathbf{n}}) + \delta J \right) + o(\varepsilon^2).$$

In Corollaries 5.17 and 5.19, in the case $d = 2$, we retrieve formulas previously proved in [7] for particular cost functions.

5.6 Well-posedness

In this section, our aim is to prove Proposition 5.2. For $\varepsilon \geq 0$ we split a_ε into $a_\varepsilon^0 + a_\varepsilon^1$ with

$$\begin{cases} a_\varepsilon^0(u, v) = \int_{\Omega} \alpha_\varepsilon(\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + u \cdot \overline{v}) \, dx - \alpha_0 \int_{\partial\Omega} \Lambda_0 u \cdot \overline{v} \, ds, \\ a_\varepsilon^1(u, v) = - \int_{\Omega} (\beta_\varepsilon + \alpha_\varepsilon) u \cdot \overline{v} \, dx - \alpha_0 \int_{\partial\Omega} \Lambda_1 u \cdot \overline{v} \, ds. \end{cases}$$

We introduce the operator

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon : H^1(\Omega) &\longrightarrow H^1(\Omega) \\ u &\longmapsto \mathcal{A}_\varepsilon u, \end{aligned}$$

such that

$$a_\varepsilon^0(\mathcal{A}_\varepsilon u, v) + a_\varepsilon^1(u, v) = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.41)$$

It follows from Hypothesis 5.3 and the Lax-Milgram theorem that the operator \mathcal{A}_ε is well-defined. Using that the imbeddings $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ and $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ are compact, we obtain that the operator \mathcal{A}_ε is compact. From (5.41) we obtain

$$a_\varepsilon(u, v) = a_\varepsilon^0((I - \mathcal{A}_\varepsilon)u, v) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (5.42)$$

The Fredholm alternative and Hypothesis 5.4 imply that the operator $I - \mathcal{A}_\varepsilon$ is invertible. Then, using the Lax-Milgram theorem, we obtain the desired result.

Proposition 5.3 can be proved by a similar manner.

References

- [1] C. Alves, H. Ammari. *Boundary integral formulas for the reconstruction of imperfections of small diameter in an elastic medium*, SIAM J. Appl. Math. 62 (2001), 94-106.
- [2] H. Ammari. *An inverse initial boundary value problem for the wave equation in the presence of imperfections of small volume*, SIAM J. Control Optim. 41 (2003), 1194-1211.
- [3] H. Ammari, D. Volkov. *Asymptotic formulas for perturbations in the eigenfrequencies of the full Maxwell equations due to the presence of imperfections of small diameter*, Asympt. Anal. 30 (2002), 331-350.
- [4] H. Ammari, S. Moskow. *Asymptotic expansions for eigenvalues in the presence of small inhomogeneities*, Math. Meth. Appl. Sci. 26 (2003), 67-75.
- [5] H. Ammari, H. Kang. *A new method for reconstructing electromagnetic inhomogeneities of small volume*, Inverse problems 19 (2003), 63-71.
- [6] H. Ammari, H. Kang. *Boundary layer techniques for solving the Helmholtz equation in the presence of small inhomogeneities*, submitted to J. Math. Anal. Appl.
- [7] S. Amstutz. *The topological asymptotic for the Helmholtz equation : insertion of a hole, a crack and a dielectric object*, Rapport MIP no. 03-05.
- [8] M. Brühl, M. Hanke and M.S. Vogelius. *A direct impedance tomography algorithm for locating small inhomogeneities*, to appear in Numer. Math.
- [9] D.J. Cedio-Fengya, S. Moskow and M.S. Vogelius. *Identification of conductivity imperfections of small diameter by boundary measurements. Continuous dependence and computational reconstruction*, Inverse problems 14 (1998), 553-595.
- [10] S. Garreau, P. Guillaume and M. Masmoudi. *The topological sensitivity for linear isotropic elasticity*, European conference on computational Mechanics (ECCM99), 1999, rapport MIP no. 99.45.
- [11] P. Guillaume, K. Sididris. *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem*, accepted in SIAM journal on Control and Optimization.
- [12] M. Masmoudi. *The Topological Asymptotic*, in Computational Methods for Control Applications, International Series GAKUTO, 2002.
- [13] A.A. Novotny, R.A. Feijóo, E. Taroco and C. Padra. *Topological sensitivity analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192 (2003) 803-829.
- [14] J. Pommier, B. Samet. *The topological asymptotic for the Helmholtz equation with Dirichlet condition on the boundary of an arbitrary shaped hole*, submitted to SIAM Journal on Control and Optimization.

- [15] A. Schumacher. *Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Topchpositionierungskriterien*, Thesis, Universität-Gesamthochschule Siegen, 1995.
- [16] J. Sokolowski, A. Żochowski. *On the topological derivative in shape optimization*, Technical report, INRIA, 1997.
- [17] M.S. Vogelius, D. Volkov. *Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter*, Math. Model. Numer. Anal. 34, pp. 723-748, 2000.

Chapitre 6

Systemes non lineaires avec condition de Dirichlet au bord d'un trou de forme quelconque

Ce chapitre est une version détaillée du papier “**The topological asymptotic for nonlinear systems**” soumis aux proceedings de la 21^e conférence IFIP TC 7.

6.1 Introduction

The topological sensitivity analysis consists in providing an asymptotic expansion of a shape function with respect to the size of a small hole inserted inside the domain. Generally, this expansion is of the form

$$j(\Omega \setminus \overline{(x_0 + \rho\omega)}) - j(\Omega) = f(\rho)g(x_0) + o(f(\rho)),$$

where ρ and x_0 denote respectively the diameter and the center of the hole, ω is a fixed domain containing the origin and f is a positive function tending to zero with ρ . Therefore, to minimize the criterion j , we have interest to insert holes where the topological gradient g is negative. This remark leads to efficient iterative algorithms based on the use of g like a descent direction.

The topological asymptotic has been instigated by the works of A. Schumacher [7], J. Sokolowski and A. Zochowski [8]. Then, M. Masmoudi [5] introduced a generalization of the adjoint method to compute g rapidly for a large class of cost functions. This approach, combined with a truncation technique, has permitted to determine the topological gradient for various problems : linear elasticity [2], Poisson [3], Stokes [4] and Helmholtz [6] equations.

For nonlinear systems, the methods previously used have to be widely modified. First, to avoid some technical difficulties, the truncation is abandoned. Secondly, the effect of the nonlinearity has to be estimated. For a certain class of operators and a Dirichlet condition on the boundary of the hole, we show that this contribution is of second order. As examples of application, we retrieve the known results concerning the previous linear systems and we obtain the topological sensitivity of the Navier-Stokes equations. For the latter case some technical hypotheses are here admitted.

6.2 Problem presentation

6.2.1 The initial problem

Let Ω be an open, bounded and connected subset of \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$, with smooth boundary Γ and consider a map Φ defined and continuous from $H^1(\mathcal{O})$ into $H^1(\mathcal{O})'$ for any open and bounded subset \mathcal{O} of \mathbb{R}^N . For a given $\sigma \in L^2(\Omega)$ continuous in a neighborhood of x_0 , we consider a field u_0 solution to

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + \Phi(u_0) = \sigma & \text{in } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (6.1)$$

We suppose that $u_0 \in H_{loc}^2(\Omega)$. The variational formulation of this PDE reads

$$\begin{cases} u_0 \in \mathcal{V}, \\ \langle F_0(u_0), \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = 0 & \forall \varphi \in \mathcal{V}, \end{cases} \quad (6.2)$$

where $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ and F_0 is the map defined by

$$\begin{cases} F_0 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}', \\ \langle F_0(u), v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \langle \Phi(u) - \sigma, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} & \forall u, v \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

6.2.2 The perturbed problem

Let ω be an open and bounded subset of \mathbb{R}^N containing the origin with smooth and connected boundary $\partial\omega$. For any sufficiently small parameter $\rho > 0$, we consider the perforated domain $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$ where $\omega_\rho = x_0 + \rho\omega$. Possibly changing the coordinate system, we will assume for convenience in the sequel that $x_0 = 0$. The perturbed field u_ρ is supposed to be of regularity H^2 in a neighborhood of ω_ρ and to be solution to

$$\begin{cases} -\Delta u_\rho + \Phi(u_\rho) = \sigma & \text{in } \Omega_\rho, \\ u_\rho = 0 & \text{on } \Gamma, \\ u_\rho = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases} \quad (6.3)$$

We define the map

$$\begin{cases} F_\rho : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}', \\ \langle F_\rho(u), v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \langle F_0(u), v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v ds + \int_{\omega_\rho} \sigma v dx & \forall u, v \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (6.4)$$

Due to the Green formula, u_ρ satisfies

$$\begin{cases} u_\rho \in \mathcal{V}, & u_\rho|_{\omega_\rho} = 0, \\ \langle F_\rho(u_\rho), \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = 0 & \forall \varphi \in \mathcal{V}. \end{cases} \quad (6.5)$$

Here, u_ρ is extended by zero inside ω_ρ . That convention will be implicitly used throughout this paper.

Remark 6.1 *The Dirichlet condition on Γ could be replaced without any influence on the topological sensitivity analysis by any boundary condition such that Problems (6.1) and (6.3) remain well-posed in relevant functional spaces.*

6.2.3 The topological sensitivity problem

We consider a cost function $j(\rho) = J_\rho(u_\rho)$ where J_ρ is a differentiable map from \mathcal{V} into \mathbb{R} . We wish to obtain an asymptotic expansion of the variation $j(\rho) - j(0)$ when ρ tends to zero.

6.3 An adjoint method

The asymptotic behavior of the cost function will be given by the following theorem, presented in an abstract framework with suitable hypotheses. In Section 6.4, we will explain under which conditions those hypotheses hold for the topological sensitivity problem under consideration.

Theorem 6.1 *Let \mathcal{V} be a Hilbert space. For all $\rho \in \mathbb{R}_+$, we consider*

- a differentiable map $F_\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$,
- a field $u_\rho \in \mathcal{V}$ satisfying

$$\langle F_\rho(u_\rho), \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}, \quad (6.6)$$

- a differentiable function $J_\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$.

We assume that there exists a field $v_0 \in \mathcal{V}$ called adjoint state solution to

$$\langle DF_0(u_0)\varphi, v_0 \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = -DJ_0(u_0)\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}. \quad (6.7)$$

We suppose that are known four real numbers δ_{F_1} , δ_{F_2} , δ_{J_1} and δ_{J_2} , as well as a function $f(\rho)$ tending to zero with ρ such that

$$\langle F_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle = f(\rho)\delta_{F_1} + o(f(\rho)), \quad (6.8)$$

$$\langle F_0(u_\rho) - F_0(u_0) - DF_0(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle = f(\rho)\delta_{F_2} + o(f(\rho)), \quad (6.9)$$

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho) = f(\rho)\delta_{J_1} + o(f(\rho)), \quad (6.10)$$

$$J_0(u_\rho) - J_0(u_0) - DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) = f(\rho)\delta_{J_2} + o(f(\rho)). \quad (6.11)$$

Then,

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = f(\rho)(\delta_{F_1} + \delta_{F_2} + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}) + o(f(\rho)).$$

Proof. Thanks to Equation (6.6),

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) = J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) + \langle F_\rho(u_\rho) - F_0(u_0), v_0 \rangle.$$

Next, Equations (6.8), (6.9), (6.10) and (6.11) yield

$$\begin{aligned} J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) &= DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) + f(\rho)(\delta_{J_1} + \delta_{J_2}) + o(f(\rho)) \\ &\quad + \langle DF_0(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle + f(\rho)(\delta_{F_1} + \delta_{F_2}) + o(f(\rho)). \end{aligned}$$

From Equation (6.7), we deduce the desired result. \square

6.4 Main results

For convenience, we introduce the notation

$$R_u(v) = \Phi(u + v) - \Phi(u). \quad (6.12)$$

Let us first consider the three-dimensional case ($N = 3$).

6.4.1 Topological sensitivity in 3D

Approximation of the perturbed solution

1. *First approximation.* We split u_ρ into

$$u_\rho = u_0 + h_\rho + r_\rho$$

where h_ρ and r_ρ are respectively solutions to

$$\begin{cases} -\Delta h_\rho = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ h_\rho \rightarrow 0 & \text{at } \infty, \\ h_\rho = -u_0 & \text{on } \partial\omega_\rho, \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} -\Delta r_\rho + R_{u_0+h_\rho}(r_\rho) = -R_{u_0}(h_\rho) & \text{in } \Omega_\rho, \\ r_\rho = -h_\rho & \text{on } \Gamma, \\ r_\rho = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

The dominant part of $u_\rho - u_0$ is expected to be h_ρ . The remainder r_ρ will be estimated further. Next, we set $H_\rho(x) = h_\rho(\rho x)$. We have

$$\begin{cases} -\Delta H_\rho = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ H_\rho \rightarrow 0 & \text{at } \infty, \\ H_\rho = -u_0(\rho x) & \text{on } \partial\omega. \end{cases}$$

2. *Second approximation.* We split H_ρ into $H_\rho = H + S_\rho$ with

$$\begin{cases} -\Delta H = 0, \\ H \rightarrow 0, \\ H = -u_0(0), \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta S_\rho = 0 \\ S_\rho \rightarrow 0 \\ S_\rho = -u_0(\rho x) + u_0(0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ \text{at } \infty, \\ \text{on } \partial\omega. \end{array}$$

The function H can be explicitated with the help of a single layer potential [1] :

$$H(x) = \int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y)$$

where the fundamental solution of the Laplace operator in 3D is

$$E(x) = \frac{1}{4\pi r}$$

and the density $\eta \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ is the unique solution to

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y) = -u_0(0) \quad \forall x \in \partial\omega. \quad (6.13)$$

Asymptotic expansion of the cost function

In order to apply Theorem 6.1, we need to determine $f(\rho)$, δ_{F_1} , δ_{F_2} , δ_{J_1} and δ_{J_2} . The values of δ_{J_1} and δ_{J_2} are given in Section 6.4.6 for some particular cost functions. Here, we assume for the moment that $\delta_{F_2} = 0$ and we focus on δ_{F_1} . By Equation (6.4),

$$\langle F_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle = \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_\rho v_0 ds + \int_{\omega_\rho} \sigma v_0 dx.$$

Replacing u_ρ by $u_0 + h_\rho + r_\rho$, making a change of variable and replacing successively H_ρ by $H + S_\rho$ and $v_0(\rho x)$ by $v_0(0) + [v_0(\rho x) - v_0(0)]$, we obtain

$$\langle F_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle = \rho \left(\int_{\partial\omega} \partial_n H ds \right) v_0(0) + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho)$$

with

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_0 v_0 ds + \int_{\omega_\rho} \sigma v_0 dx, \\ \mathcal{E}_2(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n r_\rho v_0 ds, \\ \mathcal{E}_3(\rho) &= \rho \int_{\partial\omega} \partial_n S_\rho v_0(\rho x) ds, \\ \mathcal{E}_4(\rho) &= \rho \int_{\partial\omega} \partial_n H [v_0(\rho x) - v_0(0)] ds. \end{aligned}$$

Next, due to the jump relation of the single layer potential, we have $\partial_n H = -\eta$ on $\partial\omega$. Assuming that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho)$ for $i = 1, \dots, 4$, which will be proved in Section 6.5, we deduce that Equation (6.8) holds with

$$f(\rho) = \rho \quad \text{and} \quad \delta_{F_1} = - \left(\int_{\partial\omega} \eta ds \right) v_0(0).$$

Thanks to the linearity of the integral equation (6.13), the expression of δ_{F_1} can be rewritten with the help of the coefficient

$$P = \int_{\partial\omega} \hat{\eta} ds, \tag{6.14}$$

where $\hat{\eta} \in H^{-1/2}(\partial\omega)$ is the unique solution to

$$\int_{\partial\omega} E(x - y) \hat{\eta}(y) ds(y) = 1 \quad \forall x \in \partial\omega. \tag{6.15}$$

Thus, under the following hypothesis required to prove the estimates, the asymptotic expansion of the cost function is provided by Theorem 6.1.

Hypothesis 6.2 1. *There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ and some constant $c > 0$ such that for any $f \in H^{-1}(\Omega_\rho)$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ and $u \in H^1(\Omega_\rho)$ with $\|u\|_{1,\Omega_\rho} < \lambda$ and $\|f\|_{-1,\Omega_\rho}$, $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}$ sufficiently small, the problem*

$$\begin{cases} -\Delta v + R_u(v) = f & \text{in } \Omega_\rho, \\ v = \varphi & \text{on } \Gamma, \\ v = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho, \end{cases}$$

has at least one solution satisfying

$$\|v\|_{1,\Omega_\rho} \leq c\|f\|_{-1,\Omega_\rho} + c\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}.$$

2. *There exists a constant $c > 0$ such that for all $v \in H^1(\Omega)$ with $\|v\|_{1,\Omega}$ sufficiently small,*

$$\|R_{u_0}(v)\|_{-1,\Omega} \leq c(\|v\|_{0,\Omega} + \|v\|_{1,\Omega}^2).$$

Here and in the sequel, the direct state u_0 is considered as fixed.

3. *If u is of class \mathcal{C}^2 , then $\Phi(u)$ is of class \mathcal{C}^0 .*

4. *When $\|v\|_{1,\Omega}$ tends to zero, $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\langle R_{u_0}(v) - DR_{u_0}(0)v, v_0 \rangle = o(\|v\|_{0,\Omega} + \|v\|_{1,\Omega}^2).$$

The most significant assumption may be the second one, in that its role is to provide a suitable estimate of $\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho}$. Some examples of such functions Φ are given in Section 6.4.4. As a counter-example, we cite the differential operators of order 2 which are not continuous from $H^1(\mathcal{O})$ into $H^1(\mathcal{O})'$.

Theorem 6.2 (topological sensitivity in 3D) *Supposing that*

- *the function Φ satisfies Hypothesis 6.2 and $\|u_0\|_{1,\Omega} < \lambda$,*
- *the cost function satisfies Equations (6.10) and (6.11) with $f(\rho) = \rho$,*
- *the adjoint Equation (6.7) has at least one solution $v_0 \in H_0^1(\Omega)$,*
- *the direct and adjoint states u_0 and v_0 are of class \mathcal{C}^2 in a neighborhood of the origin,*
- *the coefficient P is defined by (6.14),*

the cost function has the following asymptotic expansion :

$$j(\rho) - j(0) = \rho [Pu_0(0)v_0(0) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}] + o(\rho). \quad (6.16)$$

6.4.2 Topological sensitivity in 2D

Approximation of the perturbed solution

In dimension 2, the fundamental solution of the laplacian reads

$$E(x) = \frac{-1}{2\pi} \ln r.$$

It does not tend to zero at infinity. For this reason, the previous argumentation cannot be applied. We split u_ρ into

$$u_\rho = u_0 + h_\rho + r_\rho + s_\rho$$

where

$$h_\rho(x) = -\frac{E(x)}{E(\rho)}u_0(0)$$

and r_ρ, s_ρ are respectively solutions to

$$\begin{cases} -\Delta r_\rho + R_{u_0+h_\rho}(r_\rho) = -R_{u_0}(h_\rho) & \text{in } \Omega, \\ r_\rho = -h_\rho & \text{on } \Gamma, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta s_\rho + R_{u_0+h_\rho+r_\rho}(s_\rho) = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ s_\rho = 0 & \text{on } \Gamma, \\ s_\rho = -u_0 - h_\rho - r_\rho & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

Asymptotic expansion of the cost function

Denoting by

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n u_0 v_0 ds + \int_{\omega_\rho} \sigma v_0 dx, \\ \mathcal{E}_2(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n r_\rho v_0 ds, \\ \mathcal{E}_3(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n s_\rho v_0 ds, \\ \mathcal{E}_4(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n h_\rho [v_0 - v_0(0)] ds, \end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned} \langle F_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle &= \left(\int_{\partial\omega_\rho} \partial_n h_\rho ds \right) v_0(0) + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho) \\ &= -\frac{1}{E(\rho)} \left(\int_{\partial\omega_\rho} \partial_n E ds \right) u_0(0)v_0(0) + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho) \\ &= \frac{u_0(0)v_0(0)}{E(\rho)} + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho). \end{aligned}$$

This latter equality comes straightforwardly from the fact that E is a fundamental solution. We will prove in Section 6.5 that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(-1/\ln \rho)$ for $i = 1, \dots, 4$. Thus, we set

$$f(\rho) = \frac{-1}{\ln \rho} \quad \text{and} \quad \delta_{F_1} = 2\pi u_0(0)v_0(0).$$

We assume again that $\delta_{F_2} = 0$. We deduce the topological asymptotic from Theorem 6.1. For the proof, the following hypothesis is required.

Hypothesis 6.3 *1. There exists $p \in]1, 2[$ and $q \in]1, +\infty[$ such that Φ can be extended in a map, still denoted by Φ , which is continuous from $W^{1,p}(\mathcal{O})$ into $L^q(\mathcal{O})$ for any open and bounded subset \mathcal{O} of \mathbb{R}^2 .*

2. There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ and some constant $c > 0$ such that for any $f \in H^{-1}(\Omega_\rho)$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ and $u \in W^{1,p}(\Omega_\rho)$ with $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_\rho)} < \lambda$ and $\|f\|_{-1,\Omega_\rho}$, $\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}$ sufficiently small, the problem

$$\begin{cases} -\Delta v + R_u(v) = f & \text{in } \Omega_\rho, \\ v = \varphi & \text{on } \Gamma, \\ v = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho, \end{cases}$$

has at least one solution satisfying

$$\|v\|_{1,\Omega_\rho} \leq c\|f\|_{-1,\Omega_\rho} + c\|\varphi\|_{1/2,\Gamma}.$$

3. There exists a constant $c > 0$ such that for any open set $\mathcal{O} \subset \Omega$ and for all $u, v \in W^{1,p}(\mathcal{O})$ with $\|u\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})} \leq \lambda$ and $\|v\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})}$ sufficiently small,

$$\|R_u(v)\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq c\|v\|_{W^{1,p}(\mathcal{O})}.$$

4. When $\|v\|_{1,\Omega}$ tends to zero, $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle R_{u_0}(v) - DR_{u_0}(0)v, v_0 \rangle = o(\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}).$$

Theorem 6.3 (topological sensitivity in 2D) *Supposing that*

- the function Φ satisfies Hypothesis 6.3 and $\|u_0\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \lambda$,
- the cost function satisfies Equations (6.10) and (6.11) with $f(\rho) = -1/\ln \rho$,
- the adjoint Equation (6.7) has at least one solution $v_0 \in H_0^1(\Omega)$,
- the direct and adjoint states u_0 and v_0 are of class \mathcal{C}^2 in a neighborhood of the origin,

the cost function has the following asymptotic expansion :

$$j(\rho) - j(0) = \frac{-1}{\ln \rho} [2\pi u_0(0)v_0(0) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}] + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right). \quad (6.17)$$

6.4.3 Generalization

The results of Theorems 6.2 and 6.3 can be easily generalized to the case where the Laplace operator Δ is replaced by an operator $\tilde{\Delta}$ satisfying the following properties.

Hypothesis 6.4 *For any open and bounded set $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$, $\tilde{\Delta}$ is defined by*

$$\tilde{\Delta} : \begin{cases} \mathcal{V}(\mathcal{O}) & \rightarrow \mathcal{V}_0(\mathcal{O})' \\ u & \mapsto \operatorname{div}(A\nabla u), \end{cases}$$

where

- $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ is a closed subspace of $H^1(\mathcal{O})^n$,
- $\mathcal{V}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{V}(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})^n$,
- A is a tensor of order 4 such that

$$AU : U \geq cU : U, \quad \forall U \in \mathcal{M}_{N,n}(\mathbb{R}),$$

– the fundamental matrix of $\tilde{\Delta}$ satisfies, in the sense of the uniform norm with respect to the angular coordinate θ ,

$$E(x) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (r \rightarrow \infty) \quad \text{in } 3D,$$

$$E(x) \sim -\frac{\ln r}{2\pi}Q, \quad (r \rightarrow 0) \quad \text{in } 2D,$$

where $Q \in GL_n(\mathbb{R})$.

For such a vector operator, the scalar P has to be replaced by the $n \times n$ matrix of the linear map $u \in \mathbb{R}^n \mapsto Pu = \int_{\partial\omega} \eta ds$, η being the unique solution to

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y) = u \quad \forall x \in \partial\omega. \tag{6.18}$$

Then, under the respective hypotheses of Theorems 6.2 and 6.3 satisfied by replacing Δ by $\tilde{\Delta}$, $H^1(\mathcal{O})$ by $\mathcal{V}(\mathcal{O})$ and $H_0^1(\mathcal{O})$ by $\mathcal{V}_0(\mathcal{O})$, we have the topological asymptotics :

$$j(\rho) - j(0) = \rho [Pu_0(0).v_0(0) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}] + o(\rho) \quad \text{in } 3D. \tag{6.19}$$

$$j(\rho) - j(0) = \frac{-1}{\ln \rho} [2\pi Q^{-1}u_0(0).v_0(0) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}] + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right) \quad \text{in } 2D. \tag{6.20}$$

6.4.4 Examples

We give in Table 6.1 some examples of differential operators $\tilde{\Delta}$ satisfying Hypothesis 6.4 and of nonlinear perturbations Φ verifying Hypothesis 6.2 in dimension 3 and Hypothesis 6.3 in dimension 2. The checking of these Hypotheses is immediate, except for the Navier-Stokes problem where it is very technical and out of the scope of this paper. We give in Table 6.2 the corresponding matrix Q in 2D. In elasticity, the plane strain case is presented. For plane stress, $\lambda^* = 2\mu\lambda/(\lambda + 2\mu)$ must be substituted for λ .

PDE system	$\tilde{\Delta}u$	$\mathcal{V}(\mathcal{O})$	$\Phi(u)$
Laplace/Helmholtz	Δu	$H^1(\mathcal{O})$	$-k^2u$
linear elasticity/elastic waves	$\text{div } \sigma(u)$	$H^1(\mathcal{O})^N$	$-k^2u$
Stokes/Navier-Stokes	$\nu\Delta u$	$\{u \in H^1(\mathcal{O})^N, \text{div } u = 0\}$	$\nabla u.u$

TAB. 6.1 – Some examples of operators.

6.4.5 Spherical hole (3D)

We suppose here that $\omega = B(0, 1)$ and that the operator $\tilde{\Delta}$ is isotropic, that is, the coefficients of the matrix $E(x)$ in the local basis $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ only depend on r . In this case, the density η solution to (6.18) is constant and there exists $M \in GL_n(\mathbb{R})$ such that

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)ds(y) = M \quad \forall x \in \partial\omega.$$

PDE system	$E(x)$	Q
Laplace/Helmholtz	$\frac{-1}{2\pi} \ln r$	I
linear elasticity/elastic waves	$\frac{-(\lambda + 3\mu) \ln r I + (\lambda + \mu) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}$	$\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} I$
Stokes/Navier-Stokes	$\frac{-\ln r I + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T}{4\pi\nu}$	$\frac{1}{2\nu} I$

TAB. 6.2 – Fundamental solution and matrix Q (2D).

Thus, $\eta = M^{-1}u$ and $Pu = 4\pi M^{-1}u$. We deduce that

$$P = 4\pi M^{-1}.$$

Table 6.3 gathers the values of M corresponding to the operators presented in Table 6.1.

PDE system	$E(x)$	M
Laplace/Helmholtz	$\frac{1}{4\pi r}$	I
linear elasticity/elastic waves	$\frac{(\lambda + 3\mu)I + (\lambda + \mu) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)r}$	$\frac{2\lambda + 5\mu}{3\mu(\lambda + 2\mu)} I$
Stokes/Navier-Stokes	$\frac{I + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T}{8\pi\nu r}$	$\frac{2}{3\nu} I$

TAB. 6.3 – Fundamental solution and matrix M (3D).

6.4.6 Particular cost functions

The proof of the following theorem is done in Section 6.5.

Theorem 6.4 *For the following cost functions and an operator $\tilde{\Delta}$ satisfying Hypothesis 6.4, under the hypotheses of Theorem 6.2 in 3D (resp. Theorem 6.2 in 2D), Equations (6.10) and (6.11) hold with $f(\rho) = \rho$ (resp. $f(\rho) = -1/\ln \rho$) and the corresponding values of δ_{J_1} and δ_{J_2} .*

1. If the cost function is of the form

$$J_\rho(u) = J(u|_{\Omega \setminus \overline{B(0,R)}})$$

where $R > 0$ and J is differentiable on $\mathcal{V}_0(\Omega \setminus \overline{B(0,R)})$, then

$$\delta_{J_1} = \delta_{J_2} = 0.$$

2. For the cost function

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} |u - u_d|^2 dx$$

where $u_d \in L^2(\Omega)^n \cap L^p(B(0, R))^n$, $p > N$, $R > 0$,

$$\delta_{J_1} = \delta_{J_2} = 0.$$

3. For the cost function

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} |A\nabla(u - u_d)|^2 dx$$

where $u_d \in \mathcal{V}(\Omega) \cap W^{1,p}(B(0, R))^n$, $p > N$, $R > 0$,

$$\delta_{J_1} = 0 \quad \text{and} \quad \delta_{J_2} = \begin{cases} Pu_0(0) \cdot u_0(0) & \text{in } 3D, \\ 2\pi Q^{-1}u_0(0) \cdot u_0(0) & \text{in } 2D. \end{cases}$$

6.5 Proofs

In this section, we denote by R a fixed radius such that $\overline{B(0, R)} \subset \Omega$, $D_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$. We call c any positive number that may change from place to place but never depends on ρ .

6.5.1 Proof of theorem 6.2

Error estimate on the solution

We recall the following lemma [3].

Lemma 6.5 *Let w_ρ be the solution to*

$$\begin{cases} -\Delta w_\rho = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ w_\rho \rightarrow 0 & \text{at } \infty, \\ w_\rho = \psi & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

where $\psi \in H^{1/2}(\partial\omega_\rho)$. There exists some constants $c > 0$ such that for all ρ sufficiently small

$$\begin{aligned} \|w_\rho\|_{0, \Omega_\rho} &\leq c\rho \|\psi(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega}, \\ \|w_\rho\|_{1, D_R} &\leq c\rho \|\psi(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega}, \\ |w_\rho|_{1, \Omega_\rho} &\leq c\rho^{1/2} \|\psi(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega}. \end{aligned}$$

1. *Estimate of h_ρ .* Lemma 6.5 yields

$$\begin{aligned} \|h_\rho\|_{0, \Omega_\rho} &\leq c\rho \|u_0(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega}, \\ \|h_\rho\|_{1, D_R} &\leq c\rho \|u_0(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega}, \\ |h_\rho|_{1, \Omega_\rho} &\leq c\rho^{1/2} \|u_0(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega}. \end{aligned} \tag{6.21}$$

2. *Estimate of r_ρ .* Thanks to Hypothesis 6.2,

$$\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq c\|R_{u_0}(h_\rho)\|_{-1,\Omega_\rho} + c\|h_\rho\|_{1/2,\Gamma}.$$

Let \tilde{h}_ρ be the function

$$\tilde{h}_\rho = \begin{cases} h_\rho & \text{on } \Omega_\rho, \\ u_0 & \text{on } \omega_\rho. \end{cases}$$

We have

$$\begin{aligned} \|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} &\leq c\|R_{u_0}(\tilde{h}_\rho)\|_{-1,\Omega} + c\|h_\rho\|_{1/2,\Gamma} \\ &\leq c\|\tilde{h}_\rho\|_{0,\Omega} + c\|\tilde{h}_\rho\|_{1,\Omega}^2 + c\|h_\rho\|_{1/2,\Gamma} \\ &\leq c\|h_\rho\|_{0,\Omega_\rho} + c\|u_0\|_{0,\omega_\rho} + c\|h_\rho\|_{1,\Omega_\rho}^2 + c\|u_0\|_{1,\omega_\rho}^2 + c\|h_\rho\|_{1/2,\Gamma}. \end{aligned}$$

Then, Lemma 6.5 and the regularity of u_0 yield

$$\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq c\rho. \quad (6.22)$$

Determination of δ_{F1}

We have to prove that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho)$ for all $i = 1, \dots, 4$.

1. Due to the regularity of u_0 , v_0 and σ in a neighborhood of the origin, we have directly

$$|\mathcal{E}_1(\rho)| \leq c\rho^2.$$

2. By a change of variable and thanks to the regularity of v_0 near the origin, we have

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq c\rho\|\partial_n(r_\rho(\rho x))\|_{-1/2,\partial\omega}.$$

By difference, r_ρ is locally H^2 . Hence, with the notation

$$\tilde{H}_0^1\left(\frac{1}{\rho}\Omega_\rho\right) = \left\{ u \in H^1\left(\frac{1}{\rho}\Omega_\rho\right), u|_{\frac{1}{\rho}\Gamma} = 0 \right\},$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_2(\rho)| &\leq c\rho \left[|r_\rho(\rho x)|_{1,\frac{1}{\rho}\Omega_\rho} + \|\Delta(r_\rho(\rho x))\|_{\tilde{H}_0^1(\frac{1}{\rho}\Omega_\rho)'} \right] \\ &\leq c\rho|r_\rho(\rho x)|_{1,\frac{1}{\rho}\Omega_\rho} + c\rho^3\|(R_{u_0+h_\rho}(r_\rho) + R_{u_0}(h_\rho))(\rho x)\|_{\tilde{H}_0^1(\frac{1}{\rho}\Omega_\rho)'}. \end{aligned}$$

Yet, $R_{u_0+h_\rho}(r_\rho) + R_{u_0}(h_\rho) = R_{u_0}(h_\rho + r_\rho)$ and we have

$$\|R_{u_0}(h_\rho + r_\rho)(\rho x)\|_{\tilde{H}_0^1(\frac{1}{\rho}\Omega_\rho)'} \leq c\|R_{u_0}(h_\rho + r_\rho)(\rho x)\|_{H_0^1(\frac{1}{\rho}\Omega_\rho)'} + c\|R_{u_0}(h_\rho + r_\rho)(\rho x)\|_{H^1(\omega)'}. \cdot$$

It follows from the fact that, in ω_ρ , $h_\rho + r_\rho = -u_0$ which is of class \mathcal{C}^2 and Hypothesis 6.2 that $\|R_{u_0}(h_\rho + r_\rho)(\rho x)\|_{H^1(\omega)'} \leq c$. Then, a change of variable yields

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq c\rho^{1/2}\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} + c\rho^{1/2}\|R_{u_0}(h_\rho + r_\rho)\|_{H_0^1(\Omega)'} + c\rho^3.$$

According to Hypothesis 6.2,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_2(\rho)| &\leq c\rho^{1/2}\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} + c\rho^{1/2}(\|h_\rho + r_\rho\|_{0,\Omega} + \|h_\rho + r_\rho\|_{1,\Omega}^2) + c\rho^3 \\ &\leq c\rho^{1/2}\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} + c\rho^3 \\ &\quad + c\rho^{1/2}(\|h_\rho + r_\rho\|_{0,\Omega_\rho} + \|h_\rho + r_\rho\|_{1,\Omega_\rho}^2 + \|u_0\|_{0,\omega_\rho} + \|u_0\|_{1,\omega_\rho}^2). \end{aligned}$$

Finally, Inequalities (6.21) and (6.22) and the regularity of u_0 imply

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq c\rho^{3/2}.$$

3. We have

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq c\rho\|\partial_n S_\rho\|_{-1/2,\partial\omega} \leq c\rho|S_\rho|_{1,B\setminus\bar{\omega}}$$

where B is a ball containing $\bar{\omega}$. Yet, by means of the elliptic regularity and a Taylor expansion of u_0 at the origin, we obtain that

$$\|S_\rho\|_{1,B\setminus\bar{\omega}} \leq c\rho, \tag{6.23}$$

from which we deduce

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq c\rho^2.$$

4. A Taylor expansion of v_0 yields straightforwardly

$$|\mathcal{E}_4(\rho)| \leq c\rho^2.$$

Determination of δ_{F_2}

We obtain by an immediate calculus

$$\langle F_0(u_\rho) - F_0(u_0) - DF_0(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle = \langle R_{u_0}(u_\rho - u_0) - D\Phi(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle.$$

Due to Hypothesis 6.2 and recalling that u_ρ is extended by zero inside ω_ρ , we have

$$\begin{aligned} &\langle F_0(u_\rho) - F_0(u_0) - DF_0(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle \\ &= o(\|u_\rho - u_0\|_{0,\Omega} + \|u_\rho - u_0\|_{1,\Omega}^2) \\ &= o\left(\|h_\rho + r_\rho\|_{0,\Omega_\rho} + \|u_0\|_{0,\omega_\rho} + \|h_\rho + r_\rho\|_{1,\Omega_\rho}^2 + \|u_0\|_{1,\omega_\rho}^2\right). \end{aligned}$$

From Inequalities (6.21) and (6.22) and the regularity of u_0 in a neighborhood of the origin, we deduce that the left hand side is a $o(\rho)$ and consequently $\delta_{F_2} = 0$.

6.5.2 Proof of theorem 6.3

Error estimate on the solution

We recall the following lemma [3].

Lemma 6.6 *Let w_ρ be the solution to*

$$\begin{cases} -\Delta w_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ w_\rho = 0 & \text{on } \Gamma, \\ w_\rho = \psi & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

where $\psi \in H^{1/2}(\partial\omega_\rho)$. There exists $c > 0$ such that for all ρ sufficiently small,

$$\|w_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}} \|\psi(\rho x)\|_{1/2,\partial\omega}.$$

1. *Estimate of h_ρ .* Some easy calculus yield

$$\begin{aligned} \|h_\rho\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\leq \frac{c}{-\ln \rho} \quad , \quad \|h_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}}. \\ \|h_\rho\|_{0,\Omega_\rho} &\leq \frac{c}{-\ln \rho} \quad , \quad \|h_\rho\|_{1,D_R} \leq \frac{c}{-\ln \rho}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

2. *Estimate of r_ρ .* Thanks to Hypothesis 6.3,

$$\begin{aligned} \|r_\rho\|_{1,\Omega} &\leq c\|R_{u_0}(h_\rho)\|_{-1,\Omega} + c\|h_\rho\|_{1/2,\Gamma} \\ &\leq c\|R_{u_0}(h_\rho)\|_{L^q(\Omega)} + c\|h_\rho\|_{1/2,\Gamma} \\ &\leq c\|h_\rho\|_{W^{1,p}(\Omega)} + c\|h_\rho\|_{1/2,\Gamma} \\ &\leq \frac{c}{-\ln \rho}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Moreover, we have

$$\Delta r_\rho = R_{u_0+h_\rho}(r_\rho) + R_{u_0}(h_\rho) = R_{u_0}(h_\rho + r_\rho).$$

Thus, since $h_\rho + r_\rho \in W^{1,p}(\Omega)$, we have $R_{u_0}(h_\rho + r_\rho) \in L^q(\Omega)$. A standard interior regularity theorem yields $r_\rho \in W^{2,q}(B(0,R))$ and

$$\|r_\rho\|_{W^{2,q}(B(0,R))} \leq \frac{c}{-\ln \rho}.$$

3. *Estimate of s_ρ .* By Lemma 6.6 and Hypothesis 6.3,

$$\|s_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}} \|(u_0 + h_\rho + r_\rho)(\rho x)\|_{1/2,\partial\omega}.$$

On the one hand, on $\partial\omega$,

$$\begin{aligned} (u_0 + h_\rho)(\rho x) &= u_0(\rho x) - \frac{E(\rho x)}{E(\rho)} u_0(0) \\ &= u_0(\rho x) - u_0(0) - \frac{E(x)}{E(\rho)} u_0(0). \end{aligned}$$

We deduce

$$\|(u_0 + h_\rho)(\rho x)\|_{1/2,\partial\omega} \leq \frac{c}{-\ln \rho}.$$

On the other hand, since $W^{2,q}(B(0, R)) \subset L^\infty(B(0, R))$,

$$\begin{aligned} \|r_\rho(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega} &\leq c\|r_\rho(\rho x)\|_{1, B \setminus \bar{\omega}} \\ &\leq \frac{c}{\rho} \|r_\rho\|_{0, \rho B \setminus \bar{\omega}_\rho} + c|r_\rho|_{1, \rho B \setminus \bar{\omega}_\rho} \\ &\leq c\|r_\rho\|_{L^\infty(\Omega_\rho)} + c|r_\rho|_{1, \Omega_\rho} \\ &\leq c\|r_\rho\|_{W^{2,q}(\Omega_\rho)} \\ &\leq \frac{c}{-\ln \rho}. \end{aligned}$$

Finally,

$$\|s_\rho\|_{1, \Omega_\rho} \leq \frac{c}{(-\ln \rho)^{3/2}}. \quad (6.26)$$

Determination of δ_{F1}

1. We have immediately

$$|\mathcal{E}_1(\rho)| \leq c\rho.$$

2. The Green formula yields

$$\int_{\partial\omega_\rho} \partial_n r_\rho v_0 ds = \int_{\omega_\rho} (\Delta r_\rho v_0 + \nabla r_\rho \cdot \nabla v_0) dx.$$

Hence, we obtain by using the Hölder inequality

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_2(\rho)| &\leq c\|r_\rho\|_{W^{2,1}(\omega_\rho)} \\ &\leq c\rho^{2-2/q} \|r_\rho\|_{W^{2,q}(\omega_\rho)} \\ &\leq c \frac{\rho^{2-2/q}}{-\ln \rho}. \end{aligned}$$

3. By using a change of variable, we obtain easily that

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq c|s_\rho|_{1, \Omega_\rho} + c\|\Delta s_\rho\|_{H^1(\Omega_\rho)'}$$

Yet, thanks to Hypothesis 6.3,

$$\|\Delta s_\rho\|_{H^1(\Omega_\rho)'} = \|R_{u_0+h_\rho+r_\rho}(s_\rho)\|_{H^1(\Omega_\rho)'} \leq c\|s_\rho\|_{H^1(\Omega_\rho)}.$$

Therefore,

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq \frac{c}{(-\ln \rho)^{3/2}}.$$

4. We obtain easily that

$$|\mathcal{E}_4(\rho)| \leq \frac{c\rho}{-\ln \rho}.$$

Determination of δ_{F2}

We prove that $\delta_{F2} = 0$ in a similar manner to the 3D case.

6.5.3 Proof of theorem 6.4

For simplicity, we make the proof for $\tilde{\Delta} = \Delta$. We need the following estimate which is a consequence of Equations (6.21) and (6.22) in 3D (resp. Equations (6.24), (6.25) and (6.26) in 2D).

Lemma 6.7 *For all ρ sufficiently small, we have*

$$\begin{aligned}\|u_\rho - u_0\|_{1,D_R} &= O(f(\rho)), \\ \|u_\rho - u_0\|_{0,\Omega} &= O(f(\rho)).\end{aligned}$$

The proof of Theorem 6.4 is successively presented for the three examples of cost function.

1. The result comes straightforwardly from the differentiability of J and Lemma 6.7.
2. On the one hand, we have

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho) = - \int_{\omega_\rho} |u_d|^2 dx.$$

From the Hölder inequality and the assumption made on the regularity of u_d , we obtain easily that

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho) = o(f(\rho)).$$

Hence $\delta_{J_1} = 0$. On the other hand, we have

$$J_0(u_\rho) - J_0(u_0) = DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) + \int_{\Omega} |u_\rho - u_0|^2 dx.$$

According to Lemma 6.7, this latter term is a $o(f(\rho))$ and consequently $\delta_{J_2} = 0$.

3. We prove that $\delta_{J_1} = 0$ in the same way as in the previous case. Besides

$$\begin{aligned}V_J(u_\rho - u_0) &:= J_0(u_\rho) - J_0(u_0) - DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(u_\rho - u_0)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega_\rho} |\nabla(h_\rho + r_\rho)|^2 dx + \int_{\omega_\rho} |\nabla u_0|^2 dx.\end{aligned}$$

- Let us first study the 3D case. Thanks to the boundedness of ∇u_0 , the latter term is a $o(\rho)$. It follows from estimates (6.21) and (6.22) that

$$V_J(u_\rho - u_0) = \int_{\Omega_\rho} |\nabla h_\rho|^2 dx + o(\rho).$$

The Green formula, a change of variable and Estimate (6.23) yield successively

$$\begin{aligned}V_J(u_\rho - u_0) &= - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n h_\rho \cdot h_\rho ds + o(\rho) \\ &= -\rho \int_{\partial\omega} \partial_n H_\rho \cdot H_\rho ds + o(\rho) \\ &= -\rho \int_{\partial\omega} \partial_n H \cdot H ds + o(\rho).\end{aligned}$$

Then, by the jump relation,

$$J_0(u_\rho) - J_0(u_0) - DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) = -\rho \int_{\partial\omega} \eta \cdot u_0(0) ds + o(\rho),$$

from which we deduce the expression of δ_{J_2} .

– In 2D, we deduce from Equations (6.24), (6.25) and (6.26) that

$$\begin{aligned} V_J(u_\rho - u_0) &= \int_{\Omega_\rho} |\nabla h_\rho|^2 dx + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right) \\ &= - \int_{\partial\omega_\rho} \partial_n h_\rho \cdot h_\rho ds + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right). \end{aligned}$$

Next, an easy estimate yields

$$V_J(u_\rho - u_0) = \left(\int_{\partial\omega_\rho} \partial_n h_\rho ds \right) u_0(0) + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right).$$

We obtain finally by replacing h_ρ by its expression and by using the fact that E is a fundamental solution :

$$V_J(u_\rho - u_0) = \frac{u_0(0)^2}{E(\rho)} + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right).$$

References

- [1] R. DAUTRAY AND J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, collection CEA, 1987.
- [2] S. GARREAU, PH. GUILLAUME AND M. MASMOUDI, *The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case*, SIAM J. Control Optim., 39(6), pp. 1756-1778, 2001.
- [3] PH. GUILLAUME, K. SID IDRIS, *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem*, SIAM J. Control. Optim. 41(4), pp. 1052-1072, 2002.
- [4] PH. GUILLAUME, K. SID IDRIS, *Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations*, Rapport MIP no. 01-24, 2001.
- [5] M. MASMOUDI, *The Topological Asymptotic*, Computational Methods for Control Applications, Ed. H. Kawarada and J. Periaux, International Series GAKUTO, 2002.
- [6] B. SAMET, S. AMSTUTZ AND M. MASMOUDI, *The topological asymptotic for the Helmholtz equation*, Accepted in SIAM J. Control. Optim.
- [7] A. SCHUMACHER, *Topologieoptimisierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lopchpositionierungskriterien*, Thesis, Universität-Gesamthochschule-Siegen, 1995.
- [8] J. SOKOLOWSKI AND A. ZOCHOWSKI, *On the topological derivative in shape optimization*, Technical report, INRIA, 1997.

Chapitre 7

Equations de Navier-Stokes

Le contenu de ce chapitre sera prochainement soumis à publication.

7.1 Introduction

Local topology optimization methods are based on the computation of the first variation of a shape functional with respect to a “small” perturbation of the physical properties of the material constitutive of the domain. That perturbation can be

- either of small amplitude and fixed support,
- or of narrow support with fixed amplitude.

In the frequent case where only two types of material are allowed, the first solution requires a relaxation of the problem. A rigorous and efficient way of doing this is provided by the homogenization theory [1, 2, 3, 5, 12].

The topological sensitivity analysis is part of the second category. To present the basic idea, let us consider a shape function $\mathcal{J}(\Omega) = J_\Omega(u_\Omega)$ where u_Ω is the solution to a given PDE problem posed in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ or 3 . The perturbed domain Ω_ρ is obtained by the creation of a small hole inside the initial domain Ω_0 , that is, $\Omega_\rho = \Omega_0 \setminus (\overline{x_0 + \rho\omega})$ where ω is a fixed and bounded subset of \mathbb{R}^n containing the origin. Generally, an asymptotic expansion of the criterion \mathcal{J} can be written in the form

$$\mathcal{J}(\Omega_\rho) - \mathcal{J}(\Omega_0) = f(\rho)g(x_0) + o(f(\rho)),$$

where f is a positive function going to zero with ρ . This expansion is called the topological asymptotic and g the topological gradient. In order to minimize the cost function, the best location to insert a small hole is where g is minimal. When the topological gradient is easy to compute, this remark leads to efficient numerical algorithms.

The topological sensitivity analysis was introduced by Schumacher [16], Sokolowski and Zochowski [18] for the compliance minimization in linear elasticity with a Neumann condition on the boundary of the inserted hole. Then, Masmoudi [13] worked out a topological sensitivity framework based on a generalization of the adjoint method and on the use of a truncation technique to give an equivalent formulation of the PDE in a fixed functional space. By means of this framework, Garreau, Guillaume, Masmoudi and Sid Idris have derived the topological asymptotic expression for the linear elasticity [8], the Poisson [9] and the Stokes [10] equations with an arbitrary shaped hole and

a large class of shape functionals. If the differential operator under consideration is non-homogeneous, then the task is more difficult : the Helmholtz [14, 15] and the quasi-Stokes [11] problems with a Dirichlet condition on the hole have been treated. For a Neumann condition, the Helmholtz equation has also been studied [4], with the help of an alternative to the truncation based on the comparison between the perturbed and the initial problems both formulated in the perforated domain.

The present work deals with the stationary Navier-Stokes equations for an incompressible fluid. The main feature of this operator is to be nonlinear. Here, the natural boundary condition on the hole (*i.e.* the obstacle) is of Dirichlet type. An extension of the perturbed velocity field by zero inside the inclusion makes possible the use of an adjoint method in the whole domain, avoiding a truncation which would present technical difficulties because of the nonlinearity. We show that the effect of the convective term on the asymptotic behavior of the cost function is of second order : we obtain the same formulas as for the Stokes problem [10]. We recall the results holding for a spherical obstacle in 3D and for an arbitrary shaped obstacle in 2D, valid for a cost function which does not involve the gradient of the velocity in a neighborhood of the obstacle :

$$\mathcal{J}(\Omega_\rho) - \mathcal{J}(\Omega_0) = \begin{cases} 6\pi\nu\rho u_0(x_0).v_0(x_0) + o(\rho) & \text{in 3D,} \\ \frac{-4\pi\nu}{\ln\rho} u_0(x_0).v_0(x_0) + o\left(\frac{-1}{\ln\rho}\right) & \text{in 2D,} \end{cases}$$

where u_0 and v_0 denote respectively the direct and adjoint velocity fields.

The adjoint method is described in Section 7.2. In Section 7.3, we present the main results as well as a heuristic approach. The 3D and 2D cases are studied and some examples of cost function are given. The proofs are gathered in Section 7.5. Section 7.4 is devoted to a numerical application.

7.2 An adjoint method for the topology optimization with a Dirichlet condition

In this section is described in an abstract framework the adjoint method that will be used further for the topological asymptotic analysis.

Let $(\mathcal{V}_\rho)_{\rho \geq 0}$ and $(\mathcal{V}_\rho^0)_{\rho \geq 0}$ be two families of Hilbert spaces such that, for all $\rho \geq 0$,

$$\mathcal{V}_\rho^0 \subset \mathcal{V}_\rho \subset \mathcal{V}_0.$$

For all parameter $\rho \geq 0$, we consider

– a differentiable map

$$F_\rho : \mathcal{V}_\rho \longrightarrow \mathcal{V}'_\rho,$$

– a field u_ρ satisfying

$$\begin{cases} u_\rho \in \mathcal{V}_\rho, \\ \langle F_\rho(u_\rho), \varphi \rangle_{\mathcal{V}'_\rho, \mathcal{V}_\rho} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_\rho^0, \end{cases} \quad (7.1)$$

– a differentiable map

$$J_\rho : \mathcal{V}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}.$$

We wish to study the behavior when ρ tends to 0 of the cost function

$$j(\rho) = J_\rho(u_\rho).$$

We suppose that the following problem, called adjoint problem, has at least one solution :

$$\begin{cases} v_0 \in \mathcal{V}_0^0, \\ \langle DF_0(u_0)\varphi, v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = -DJ_0(u_0)\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0^0. \end{cases} \quad (7.2)$$

Hypothesis 7.1 *There exists a positive function $f(\rho)$ tending to zero with ρ , two real numbers $\delta_{F_1}, \delta_{F_2}$ and a family of maps*

$$\tilde{F}_\rho : \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathcal{V}'_0$$

such that

$$\langle \tilde{F}_\rho(u_\rho), \varphi \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0^0, \quad (7.3)$$

and

$$\langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = f(\rho)\delta_{F_1} + o(f(\rho)), \quad (7.4)$$

$$\langle F_0(u_\rho) - F_0(u_0) - DF_0(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = f(\rho)\delta_{F_2} + o(f(\rho)). \quad (7.5)$$

Hypothesis 7.2 *There exists $\delta_{J_1}, \delta_{J_2} \in \mathbb{R}$ such that*

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho) = f(\rho)\delta_{J_1} + o(f(\rho)), \quad (7.6)$$

$$J_0(u_\rho) - J_0(u_0) - DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) = f(\rho)\delta_{J_2} + o(f(\rho)). \quad (7.7)$$

Then, the first order asymptotic expansion of the cost function is given by the following theorem.

Theorem 7.1 *If Hypotheses 7.1 and 7.2 hold, then*

$$j(\rho) - j(0) = f(\rho)\delta_j + o(f(\rho))$$

with

$$\delta_j = \delta_{F_1} + \delta_{F_2} + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}.$$

Proof. By Equations (7.1) and (7.3),

$$j(\rho) - j(0) = J_\rho(u_\rho) - J_0(u_0) + \langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_0), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0}.$$

Next, Equations (7.4), (7.5), (7.6) and (7.7) yield

$$\begin{aligned} j(\rho) - j(0) &= DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) + f(\rho)(\delta_{J_1} + \delta_{J_2}) + o(f(\rho)) \\ &\quad + \langle DF_0(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} + f(\rho)(\delta_{F_1} + \delta_{F_2}) + o(f(\rho)). \end{aligned}$$

From Equation (7.2), we deduce the desired result. \square

7.3 Topological asymptotic for the Navier-Stokes problem

7.3.1 Presentation of the problem

Let Ω be an open, bounded and connected subset of \mathbb{R}^n , $n = 2$ or 3 , with smooth (\mathcal{C}^2) and connected boundary Γ . We are interested in the following problem : find $(u_0, p_0) \in H^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_0 + \nabla u_0 \cdot u_0 + \nabla p_0 = 0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u_0 = 0 & \text{in } \Omega, \\ u_0 = U & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (7.8)$$

Here, $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ and $U \in H^{1/2}(\Gamma)^n$ with

$$\int_{\Gamma} U \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad (7.9)$$

the vector \mathbf{n} denoting the outward unit normal of Γ . The notation $\nabla u \cdot v$ means the matrix-vector product Duv .

For a given $x_0 \in \Omega$, consider the perforated domain $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$, $\omega_\rho = x_0 + \rho\omega$, where ω is a fixed open and bounded subset of \mathbb{R}^n containing the origin and whose boundary $\partial\omega$ is connected and of class \mathcal{C}^2 (see Figure 7.1). We assume that Ω_ρ is connected. Possibly changing the coordinate system, we will suppose in the sequel that $x_0 = 0$. The new pressure and velocity fields are solution to the problem : find

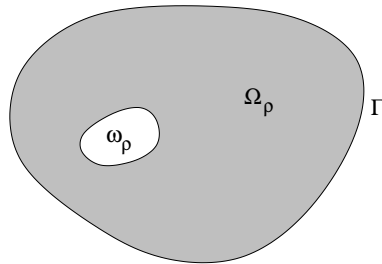


FIG. 7.1 – The perforated domain.

$(u_\rho, p_\rho) \in H^1(\Omega_\rho)^n \times L^2(\Omega_\rho)$ such that

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_\rho + \nabla u_\rho \cdot u_\rho + \nabla p_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ \operatorname{div} u_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ u_\rho = U & \text{on } \Gamma, \\ u_\rho = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases} \quad (7.10)$$

7.3.2 Well-posedness

Direct problem

For all $\rho \geq 0$, we define the spaces

$$\mathcal{V}_\rho = \{u \in H^1(\Omega_\rho)^n, \operatorname{div} u = 0, u|_{\partial\omega_\rho} = 0\},$$

$$\mathcal{V}_\rho^0 = \{u \in \mathcal{V}_\rho, u|_\Gamma = 0\}$$

and the map

$$F_\rho : \mathcal{V}_\rho \longrightarrow \mathcal{V}'_\rho$$

$$\langle F_\rho(u), \varphi \rangle_{\mathcal{V}'_\rho, \mathcal{V}_\rho} = \int_{\Omega_\rho} [\nu \nabla u : \nabla \varphi + (\nabla u \cdot u) \cdot \varphi] dx \quad \forall u, \varphi \in \mathcal{V}_\rho.$$

The variational formulation associated to Problem (7.10) reads as follows :

$$\begin{cases} u_\rho \in \mathcal{V}_\rho, \\ \langle F_\rho(u_\rho), \varphi \rangle_{\mathcal{V}'_\rho, \mathcal{V}_\rho} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_\rho^0, \\ u_\rho|_\Gamma = U. \end{cases} \quad (7.11)$$

We notice that the pressure does not appear in this formulation. It can be deduced afterwards from the velocity field up to an additive constant. In [19], it is proved that Problem (7.10) has at least one solution. We denote

$$k = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{meas}(\Omega)^{1/6} & \text{if } n = 3, \\ \frac{1}{2} \text{meas}(\Omega)^{1/2} & \text{if } n = 2 \end{cases} \quad (7.12)$$

and we suppose that

$$|u_0|_{1,\Omega} < \frac{\nu}{k}. \quad (7.13)$$

In [7], it is proved that (7.13) is a sufficient uniqueness condition for Problem (7.8). Thanks to results stated further (Estimates (7.29) and (7.30) in 3D, (7.32) and (7.33) in 2D and the equality $u_\rho - u_0 = h_\rho + r_\rho$), we have that (7.13) implies $|u_\rho|_{1,\Omega_\rho} < \nu/k$ for any ρ sufficiently small and thus, for such a ρ , Problem (7.10) admits a unique solution.

Adjoint problem

For all $u, \varphi, v \in \mathcal{V}_0$, we have

$$\langle DF_0(u)\varphi, v \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = \int_{\Omega} [\nu \nabla \varphi : \nabla v + (\nabla \varphi \cdot u + \nabla u \cdot \varphi) \cdot v] dx.$$

If $\varphi \in \mathcal{V}_0^0$, then an integration by parts yields

$$\langle DF_0(u)\varphi, v \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = \int_{\Omega} [\nu \nabla v : \nabla \varphi + (-\nabla v \cdot u + \nabla u^T \cdot v) \cdot \varphi] dx.$$

Consider now a differentiable cost function $J_\rho : \mathcal{V}_\rho \longrightarrow \mathbb{R}$. The adjoint problem reads :

$$\begin{cases} v_0 \in \mathcal{V}_0^0, \\ \int_{\Omega} [\nu \nabla v_0 : \nabla \varphi + (-\nabla v_0 \cdot u_0 + \nabla u_0^T \cdot v_0) \cdot \varphi] dx = -DJ_0(u_0)\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0^0. \end{cases}$$

This corresponds to the classical formulation : find $(v_0, q_0) \in H^1(\Omega)^n \times L^2(\Omega)$ such that

$$\begin{cases} -\nu \Delta v_0 - \nabla v_0 \cdot u_0 + \nabla u_0^T \cdot v_0 + \nabla q_0 = -DJ_0(u_0) & \text{in } \Omega, \\ \text{div } v_0 = 0 & \text{in } \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \quad (7.14)$$

Since u_0 satisfies (7.13), the existence and uniqueness of the solution to (7.14) is a consequence of the Lax-Milgram theorem. Actually, the coercivity of the associated bilinear form comes from Lemmas 7.5 and 7.6 : for all $v \in H^1(\Omega)^n$,

$$\begin{aligned} |\langle DF_0(u_0)v, v \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0}| &= \left| \int_{\Omega} [\nu |\nabla v|^2 + (\nabla u_0 \cdot v) \cdot v] dx \right| \\ &\geq \nu |v|_{1, \Omega}^2 - k |u_0|_{1, \Omega} |v|_{1, \Omega}^2 \\ &\geq \alpha |v|_{1, \Omega}^2, \quad \text{with } \alpha = \nu - k |u_0|_{1, \Omega} > 0. \end{aligned}$$

Extended problem

- In order to fully enter the framework of Section 7.2, we add two other definitions.
- The extension by zero in ω_ρ defines an embedding from \mathcal{V}_ρ into \mathcal{V}_0 . This embedding will be considered in all the paper as “canonical” : the extension by zero of a function $u \in \mathcal{V}_\rho$ will be still denoted by u .
 - Thanks to a standard regularity property (see [7]), (u_ρ, p_ρ) is $H^2 \times H^1$ in a neighborhood of ω_ρ . Therefore, for all $\rho \geq 0$, the following definition of the map \tilde{F}_ρ makes sense :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\rho : \mathcal{V}_0 &\longrightarrow \mathcal{V}'_0 \\ \langle \tilde{F}_\rho(u), \varphi \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} &= \langle F_0(u), \varphi \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} + \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n u_\rho - p_\rho \mathbf{n}) \cdot \varphi ds \quad \forall u, \varphi \in \mathcal{V}_0. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Using the Green formula, we obtain directly that

$$\langle \tilde{F}_\rho(u_\rho), \varphi \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{V}_0^0.$$

We now turn to the topological asymptotic analysis. The 3D and 2D cases will be studied successively. The step will be

1. to give a suitable approximation of the variation of the solution $u_\rho - u_0$,
2. to determine $f(\rho)$, δ_{F_1} and δ_{F_2} such that Hypothesis 7.1 holds,
3. to check Hypothesis 7.2 for some examples of cost function.

7.3.3 Topological sensitivity in 3D

Approximation of the perturbed solution

- *First approximation.* We split (u_ρ, p_ρ) into

$$(u_\rho, p_\rho) = (u_0, p_0) + (h_\rho, p'_\rho) + (r_\rho, p''_\rho)$$

where (h_ρ, p'_ρ) and (r_ρ, p''_ρ) are respectively solutions to :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\nu \Delta h_\rho + \nabla p'_\rho & = & 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ \operatorname{div} h_\rho & = & 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega_\rho}, \\ h_\rho & \longrightarrow & 0 \quad \text{at } \infty, \\ h_\rho & = & -u_0 \quad \text{on } \partial\omega_\rho, \end{array} \right. \tag{7.16}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta r_\rho + \nabla r_\rho \cdot (u_0 + h_\rho) + \nabla(u_0 + h_\rho) \cdot r_\rho + \nabla r_\rho \cdot r_\rho + \nabla p_\rho'' \\ \quad \quad \quad = -\nabla h_\rho \cdot u_0 - \nabla u_0 \cdot h_\rho - \nabla h_\rho \cdot h_\rho \quad \text{in } \Omega_\rho, \\ \text{div } r_\rho = 0 \quad \text{in } \Omega_\rho, \\ r_\rho = -h_\rho \quad \text{on } \Gamma, \\ r_\rho = 0 \quad \text{on } \partial\omega_\rho. \end{array} \right. \quad (7.17)$$

It is respectively proved in [6] and [7] that Problem (7.16) has one and only one solution $(h_\rho, p'_\rho) \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega_\rho})^3 \times L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega_\rho})/\mathbb{R}$ and that Problem (7.17) has at least one solution $(r_\rho, p''_\rho) \in H^1(\Omega_\rho)^3 \times L^2(\Omega_\rho)/\mathbb{R}$. We recall that, for any open and bounded subset \mathcal{O} of \mathbb{R}^3 , the space $W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}})$ is defined by [6]

$$W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}) = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)^{1/2}} \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}), \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}})^3 \right\}.$$

– *Second approximation.* We set $H_\rho(x) = h_\rho(\rho x)$ and $P'_\rho(x) = \rho p'_\rho(x)$. We have

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta H_\rho + \nabla P'_\rho = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ \text{div } H_\rho = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ H_\rho \longrightarrow 0 \quad \text{at } \infty, \\ H_\rho = -u_0(\rho x) \quad \text{on } \partial\omega. \end{array} \right. \quad (7.18)$$

Then, we split (H_ρ, P'_ρ) into

$$(H_\rho, P'_\rho) = (H, P) + (S_\rho, P''_\rho)$$

where (H, P) and (S_ρ, P''_ρ) are respectively solutions to :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta H + \nabla P = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ \text{div } H = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ H \longrightarrow 0 \quad \text{at } \infty, \\ H = -u_0(0) \quad \text{on } \partial\omega, \end{array} \right. \quad (7.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta S_\rho + \nabla P''_\rho = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ \text{div } S_\rho = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}, \\ S_\rho \longrightarrow 0 \quad \text{at } \infty, \\ S_\rho = -u_0(\rho x) + u_0(0) \quad \text{on } \partial\omega. \end{array} \right. \quad (7.20)$$

Problem (7.19) can be solved with the help of a single layer potential (see [6]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(x) = \int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y), \\ P(x) = \int_{\partial\omega} \Pi(x-y)\eta(y)ds(y), \end{array} \right.$$

where $\eta \in H^{-1/2}(\partial\omega)^3$ is solution to

$$\int_{\partial\omega} E(x-y)\eta(y)ds(y) = -u_0(0) \quad \forall x \in \partial\omega \quad (7.21)$$

and

$$E(x) = \frac{1}{8\pi\nu r}(I + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T), \quad \Pi(x) = \frac{x}{4\pi r^3}.$$

The density η is unique up to a function proportional to the normal.

Heuristics

Our aim here is to determine $f(\rho)$, δ_{F_1} and δ_{F_2} such that Equations (7.4) and (7.5) hold. We assume for the moment that $\delta_{F_2} = 0$ and we focus on δ_{F_1} . By Equation (7.15), we have

$$\langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n u_\rho - p_\rho \mathbf{n}) \cdot v_0 ds.$$

Denoting

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n u_0 - p_0 \mathbf{n}) \cdot v_0 ds, \\ \mathcal{E}_2(\rho) &= \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n r_\rho - p'_\rho \mathbf{n}) \cdot v_0 ds, \\ \mathcal{E}_3(\rho) &= \rho \int_{\partial\omega} (\nu \partial_n S_\rho - P'_\rho \mathbf{n}) \cdot v_0(\rho x) ds, \end{aligned}$$

we obtain successively

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} &= \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n h_\rho - p'_\rho \mathbf{n}) \cdot v_0 ds + \mathcal{E}_1(\rho) + \mathcal{E}_2(\rho) \\ &= \rho \int_{\partial\omega} (\nu \partial_n H_\rho - P'_\rho \mathbf{n}) \cdot v_0(\rho x) ds + \mathcal{E}_1(\rho) + \mathcal{E}_2(\rho) \\ &= \rho \int_{\partial\omega} (\nu \partial_n H - P \mathbf{n}) \cdot v_0(\rho x) ds + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i(\rho). \end{aligned}$$

Then, the jump relation of the single layer potential yields (see [6])

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} &= -\rho \int_{\partial\omega} \eta \cdot v_0(\rho x) ds + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i(\rho) \\ &= -\rho \left(\int_{\partial\omega} \eta ds \right) \cdot v_0(0) + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho), \end{aligned}$$

where

$$\mathcal{E}_4(\rho) = -\rho \int_{\partial\omega} \eta \cdot [v_0(\rho x) - v_0(0)] ds.$$

We will prove in Section 7.5 that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho)$ for all $i = 1, \dots, 4$. Thus, Hypothesis 7.1 holds with

$$f(\rho) = \rho \quad \text{and} \quad \delta_{F_1} = - \left(\int_{\partial\omega} \eta ds \right) \cdot v_0(0).$$

Therefore, Theorem 7.1 provides the following asymptotic expansion of the cost function.

Theorem 7.2 *Supposing that*

- *the cost function satisfies Hypothesis 7.2 with $f(\rho) = \rho$,*

- the direct and adjoint states are defined by (7.8) and (7.14),
- the direct and adjoint states (u_0, p_0) and (v_0, q_0) are both of class $\mathcal{C}^2 \times \mathcal{C}^1$ in a neighborhood of the origin,
- condition (7.13) is fulfilled,
- the density η is defined by (7.21),

the cost function has the following asymptotic expansion :

$$j(\rho) - j(0) = \rho \left[- \left(\int_{\partial\omega} \eta ds \right) . v_0(0) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2} \right] + o(\rho). \quad (7.22)$$

Spherical hole

Consider the case where $\omega = B(0, 1)$. We have

$$\int_{\partial\omega} E(x - y) ds = \frac{2}{3\nu} I \quad \forall x \in \partial\omega.$$

Hence

$$\eta(y) = -\frac{3\nu}{2} u_0(0) \quad \forall y \in \partial\omega$$

and

$$j(\rho) - j(0) = \rho [6\pi\nu u_0(0) . v_0(0) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}]. \quad (7.23)$$

7.3.4 Topological sensitivity in 2D

Approximation of the perturbed solution

In dimension two, the fundamental solution of the Stokes problem is :

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\nu} (-\ln r I + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T), \quad \Pi(x) = \frac{x}{2\pi r^2}.$$

The matrix $E(x)$ does not tend to zero at infinity. That is why the argumentation is quite different from what was done in 3D.

We split (u_ρ, p_ρ) into

$$(u_\rho, p_\rho) = (u_0, p_0) + (h_\rho, p'_\rho) + (r_\rho, p''_\rho)$$

with :

$$\begin{cases} h_\rho &= \frac{-1}{\ln \rho} (H - H_\rho), \\ p'_\rho(x) &= \frac{-1}{\ln \rho} (P - P_\rho), \end{cases} \quad (7.24)$$

$$\begin{cases} H(x) &= -4\pi\nu E(x) u_0(0), \\ P(x) &= -4\pi\nu \Pi(x) . u_0(0), \end{cases} \quad (7.25)$$

$$\begin{cases} -\nu \Delta H_\rho + \nabla H_\rho . (u_0 - \frac{1}{\ln \rho} H) + (\nabla u_0 - \frac{1}{\ln \rho} \nabla H) . H_\rho + \frac{1}{\ln \rho} \nabla H_\rho . H_\rho + \nabla P_\rho \\ \quad = \nabla u_0 . H + \nabla H . u_0 - \frac{1}{\ln \rho} \nabla H . H & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} H_\rho = 0 & \text{in } \Omega, \\ H_\rho = H & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (7.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu\Delta r_\rho + \nabla r_\rho \cdot (u_0 + h_\rho) + \nabla(u_0 + h_\rho) \cdot r_\rho + \nabla r_\rho \cdot r_\rho + \nabla p_\rho'' = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ \operatorname{div} r_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ r_\rho = 0 & \text{on } \Gamma, \\ r_\rho = -u_0 - h_\rho & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{array} \right. \quad (7.27)$$

Heuristics

We assume here again that $\delta_{F_2} = 0$ and we wish to determine δ_{F_1} . We recall that

$$\langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n u_\rho - p_\rho \mathbf{n}) \cdot v_0 ds.$$

Denoting

$$\mathcal{E}_1(\rho) = \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n u_0 - p_0 \mathbf{n}) \cdot v_0 ds,$$

$$\mathcal{E}_2(\rho) = \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n r_\rho - p_\rho' \mathbf{n}) \cdot v_0 ds,$$

$$\mathcal{E}_3(\rho) = \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n h_\rho - p_\rho' \mathbf{n}) \cdot (v_0 - v_0(0)) ds,$$

$$\mathcal{E}_4(\rho) = \frac{-1}{\ln \rho} \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n H_\rho - P_\rho \mathbf{n}) \cdot v_0(0) ds,$$

we have

$$\begin{aligned} \langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} &= \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n h_\rho - p_\rho' \mathbf{n}) \cdot v_0(0) ds + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E}_i(\rho) \\ &= \frac{-1}{\ln \rho} \int_{\partial\omega_\rho} (\nu \partial_n H - P \mathbf{n}) \cdot v_0(0) ds + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho) \\ &= \frac{-4\pi\nu}{\ln \rho} \int_{\partial\omega_\rho} [\nu \partial_n (E u_0(0)) - (\Pi \cdot u_0(0)) \mathbf{n}] \cdot v_0(0) ds + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho). \end{aligned}$$

Then, due to the fact that (E, Π) is a fundamental solution,

$$\langle \tilde{F}_\rho(u_\rho) - F_0(u_\rho), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} = -\frac{4\pi\nu}{\ln \rho} u_0(0) \cdot v_0(0) ds + \sum_{i=1}^4 \mathcal{E}_i(\rho).$$

Hence, assuming that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho)$ for all $i = 1, \dots, 4$ (see Section 7.5), Hypothesis 7.1 holds with

$$f(\rho) = \frac{-1}{\ln \rho} \quad \text{and} \quad \delta_{F_1} = 4\pi\nu u_0(0) \cdot v_0(0).$$

Then, Theorem 7.1 provides the following asymptotic expansion of the cost function.

Theorem 7.3 *Supposing that*

- the cost function satisfies Hypothesis 7.2 with $f(\rho) = -1/\ln \rho$,
- the direct and adjoint states are defined by (7.8) and (7.14),
- the direct and adjoint states (u_0, p_0) and (v_0, q_0) are both of class $\mathcal{C}^2 \times \mathcal{C}^1$ in a neighborhood of the origin,
- condition (7.13) is fulfilled,

the cost function has the following asymptotic expansion :

$$j(\rho) - j(0) = \frac{-1}{\ln \rho} [4\pi\nu u_0(0) \cdot v_0(0) + \delta_{J_1} + \delta_{J_2}] + o\left(\frac{-1}{\ln \rho}\right). \quad (7.28)$$

7.3.5 Some examples of cost function

We give here three examples of cost function valid in dimension 2 and 3. The proof of the following theorem is reported in Section 7.5.

Theorem 7.4 *For the following cost functions, Hypothesis 7.2 holds for the indicated values of δ_{J_1} and δ_{J_2} .*

1. *If there exists a neighborhood \mathcal{O} of the origin and a differentiable map $J : \{u \in H^1(\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}})^n, \operatorname{div} u = 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ such that for all $u \in \mathcal{V}_\rho$*

$$J_\rho(u) = J(u|_{\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}}}),$$

then

$$\delta_{J_1} = \delta_{J_2} = 0.$$

2. *For the cost function*

$$J_\rho(u) = \int_{\Omega_\rho} |u - u_d|^2 dx$$

where $u_d \in (L^2(\Omega) \cap L^p(\mathcal{O}))^n, p > n, \{0\} \subset \mathcal{O} \subset \Omega$,

$$\delta_{J_1} = \delta_{J_2} = 0.$$

3. *For the cost function*

$$J_\rho(u) = \nu \int_{\Omega_\rho} |\nabla u - \nabla u_d|^2 dx$$

where $u_d \in (H^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\mathcal{O}))^n, p > n, \{0\} \subset \mathcal{O} \subset \Omega$,

$$\delta_{J_1} = 0$$

and

$$\delta_{J_2} = \begin{cases} - \left(\int_{\partial\omega} \eta ds \right) \cdot u_0(0) & \text{if } n = 3, \\ 4\pi\nu |u_0(0)|^2 & \text{if } n = 2. \end{cases}$$

For a spherical hole in 3D, we have

$$\delta_{J_2} = 6\pi\nu |u_0(0)|^2.$$

7.4 A numerical Example

We illustrate the use of the topological asymptotic analysis on a shape optimization example taken from [10] where it is considered in the context of the Stokes equations. It consists in inserting some small obstacles in a tank filled with an incompressible fluid in order to approximate a target flow u_d . The geometry (2D) and the boundary conditions are given in Figure 7.2. The initial velocity and pressure fields u_0 and p_0 are supposed to satisfy the Navier-Stokes equations in Ω :

$$\begin{cases} -\nu\Delta u_0 + \nabla u_0 \cdot u_0 + \nabla p_0 = 0, \\ \operatorname{div} u_0 = 0. \end{cases}$$

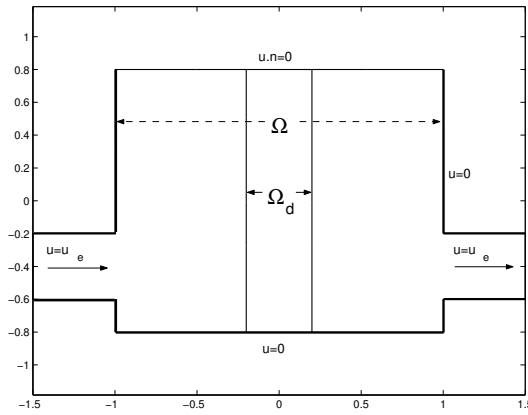


FIG. 7.2 – The domain and the boundary conditions.

The cost function to be minimized is defined by

$$J(u) = \int_{\Omega_d} |u - u_d|^2 dx,$$

$$u_d = \left(2 \times V_{mean} \times \frac{0.4(y + 0.8)}{1.6^2}, 0 \right),$$

where V_{mean} is the mean velocity of the fluid at the inlet. For that function, the topological asymptotic is given by Formula (7.28) with $\delta_{J_1} = \delta_{J_2} = 0$. The topological gradient at the point x_0 is then

$$g(x_0) = u_0(x_0) \cdot v_0(x_0).$$

The obstacles are only allowed to be inserted in the right part of $\Omega \setminus \overline{\Omega_d}$. The topological optimization algorithm used here is the following.

- Initialization : choose $\Omega_0 = \Omega$ and set $k = 0$.
- Repeat until target is reached :
 1. solve the direct and adjoint problems in Ω_k ,
 2. compute the topological gradient g ,

3. seek $x^* = \operatorname{argmin}(g(x), x \in \Omega_k)$,
4. set $\Omega_{k+1} = \Omega_k \setminus \overline{B(x^*, r_0)}$,
5. $k \leftarrow k + 1$.

The radius r_0 is fixed and chosen by the user, here $r_0 = 0.03$. We present two experiments. For the first one, we have taken $V_{mean} = 10$, which corresponds to a Reynolds number calculated with respect to the inlet section equal to 4. The direct and adjoint flows and the topological gradient corresponding to the initial geometry are represented in Figures 7.3 and 7.4. Figure 7.5 illustrates the direct flow obtained after three iterations as well as the target flow. A convergence history of the cost function is given in Figure 7.6. In the second configuration (Figure 7.7), we have taken $V_{mean} = 50$ ($Re = 20$). For higher Reynolds numbers, the risk of appearance of turbulent structures makes inappropriate an optimization process based on the insertion of separated obstacles.

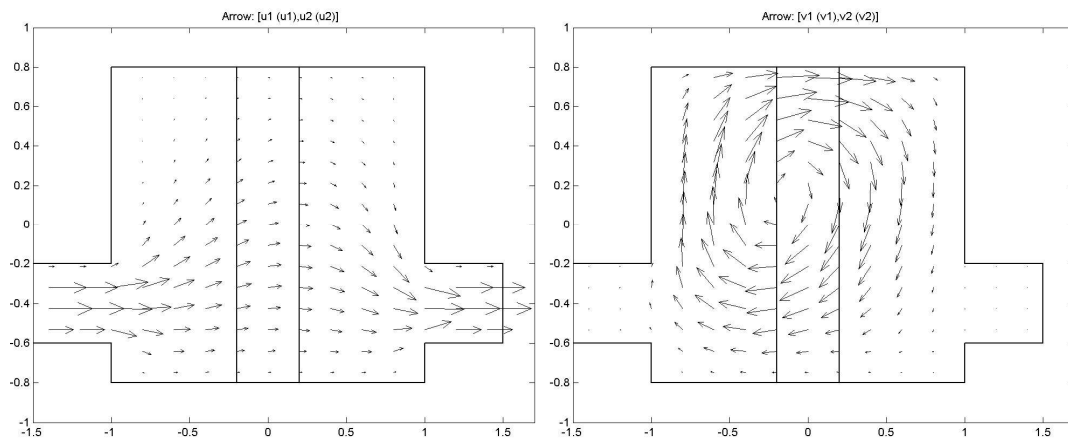


FIG. 7.3 – The direct and adjoint flows ($Re=4$).

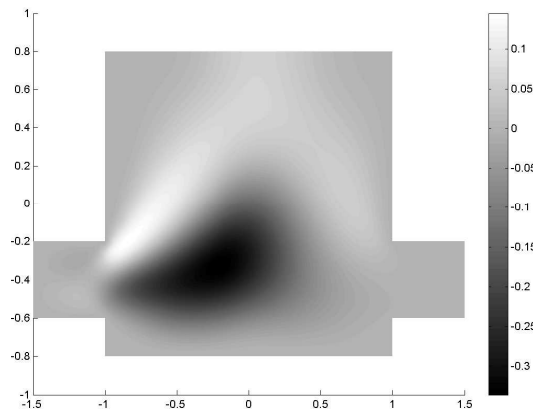


FIG. 7.4 – The topological gradient at the first iteration ($Re=4$).

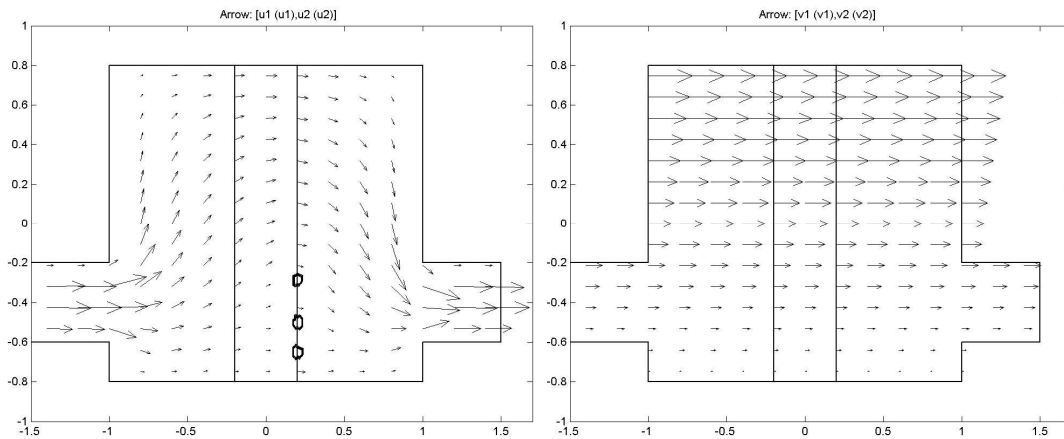


FIG. 7.5 – The direct flow after 3 iterations and the target flow ($Re=4$).

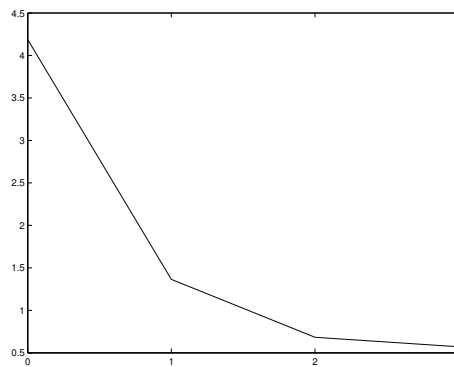


FIG. 7.6 – Convergence history ($Re=4$).

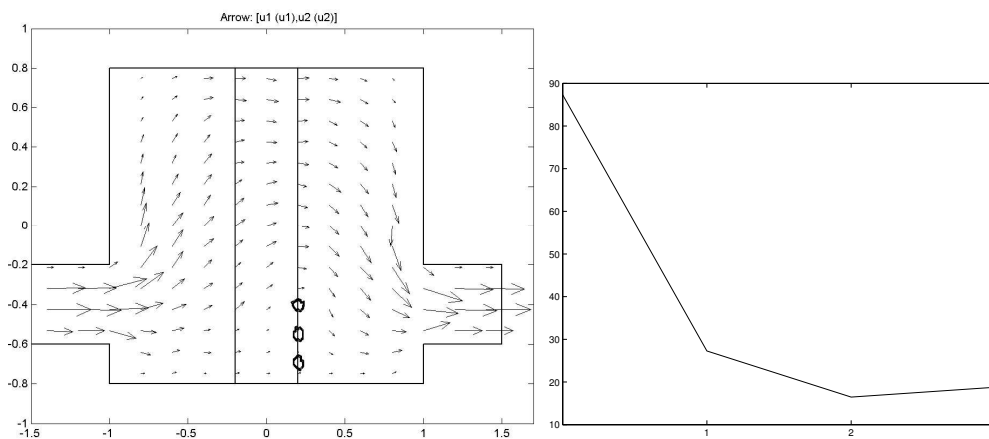


FIG. 7.7 – The direct flow after 3 iterations and the convergence history ($Re=20$).

7.5 Proofs

This section consists in the proof of Theorems 7.2, 7.3 and 7.4.

7.5.1 Preliminary lemmas

Proofs of the first three lemmas can be found in [7].

Lemma 7.5 (n=2,3) For all $(u, v) \in H_0^1(\Omega_\rho)^n \times H^1(\Omega_\rho)^n$ with $\operatorname{div} v = 0$,

$$\int_{\Omega_\rho} (\nabla u \cdot v) \cdot u \, dx = 0.$$

Lemma 7.6 (n=2,3) For all $(u, v, w) \in H^1(\Omega_\rho)^n \times H^1(\Omega_\rho)^n \times H^1(\Omega_\rho)^n$,

$$\left| \int_{\Omega_\rho} (\nabla u \cdot v) \cdot w \, dx \right| \leq c(n, \Omega) |u|_{1, \Omega_\rho} \|v\|_{1, \Omega_\rho} \|w\|_{1, \Omega_\rho}.$$

Moreover, if $v|_\Gamma = w|_\Gamma = 0$,

$$\left| \int_{\Omega_\rho} (\nabla u \cdot v) \cdot w \, dx \right| \leq k |u|_{1, \Omega_\rho} |v|_{1, \Omega_\rho} |w|_{1, \Omega_\rho},$$

where k is defined by (7.12).

Lemma 7.7 (n=2,3) Consider $R > 0$ such that $B(0, R) \subset \Omega$. There exists $\alpha = \alpha(n, R, \Omega) > 0$ and $c_0 = c_0(n, R, \Omega) > 0$ such that for all $w \in H^{1/2}(\Gamma)^n$ satisfying

$$\int_\Gamma w \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \text{and} \quad \|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \alpha$$

there exists $W \in H^1(\Omega)^n$ such that

$$\begin{aligned} W|_\Gamma &= w, \\ \operatorname{div} W &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ W &= 0 \quad \text{in } B(0, R), \\ |W|_{1, \Omega} &\leq c_0 \|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}. \end{aligned}$$

Lemma 7.8 (n=2,3) Consider $f_\rho \in H^{-1}(\Omega_\rho)^n$, $V_\rho \in H^1(\Omega_\rho)^n$ with $\operatorname{div} V_\rho = 0$ and $|V_\rho|_{1, \Omega_\rho} \leq \beta < \nu/k$ and $w \in H^{1/2}(\Gamma)^n$ verifying $\int_\Gamma w \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$. Let $(y_\rho, p_\rho) \in H^1(\Omega_\rho)^n \times L^2(\Omega_\rho)$ be a solution (see [7] for a proof of existence) to the problem :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta y_\rho + \nabla y_\rho \cdot V_\rho + \nabla V_\rho \cdot y_\rho + \nabla y_\rho \cdot y_\rho + \nabla p_\rho &= f_\rho \quad \text{in } \Omega_\rho, \\ \operatorname{div} y_\rho &= 0 \quad \text{in } \Omega_\rho, \\ y_\rho &= w \quad \text{on } \Gamma, \\ y_\rho &= 0 \quad \text{on } \partial\omega_\rho. \end{array} \right.$$

There exists some constants $\gamma = \gamma(n, \Omega)$ and $c = c(n, \Omega)$ such that if $\|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \gamma$, then

$$\|y_\rho\|_{1, \Omega_\rho} \leq c \|f_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} + c(1 + \nu) \|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} + c \|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2.$$

Proof. Let us consider W the extension of w given by Lemma 7.7 (we impose for that $\gamma \leq \alpha$). The function $z_\rho = y_\rho - W$ satisfies

$$\begin{cases} -\nu\Delta z_\rho + \nabla z_\rho \cdot (V_\rho + W) + \nabla(V_\rho + W) \cdot z_\rho + \nabla z_\rho \cdot z_\rho + \nabla p_\rho \\ = f_\rho + \nu\Delta W - \nabla W \cdot V_\rho - \nabla V_\rho \cdot W - \nabla W \cdot W & \text{in } \Omega_\rho, \\ \operatorname{div} z_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ z_\rho = 0 & \text{on } \Gamma, \\ z_\rho = 0 & \text{on } \partial\omega_\rho, \end{cases}$$

Taking z_ρ as test function in the variational formulation of the above problem brings

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\rho} [\nu \nabla z_\rho : \nabla z_\rho + (\nabla z_\rho \cdot (V_\rho + W) + \nabla(V_\rho + W) \cdot z_\rho + \nabla z_\rho \cdot z_\rho) \cdot z_\rho] dx \\ = & \int_{\Omega_\rho} [-\nu \nabla W : \nabla z_\rho + (f_\rho - \nabla W \cdot V_\rho - \nabla V_\rho \cdot W - \nabla W \cdot W) \cdot z_\rho] dx. \end{aligned}$$

Thanks to Lemma 7.5, two terms vanish in the left hand side and we obtain

$$\begin{aligned} & \nu \int_{\Omega_\rho} \nabla z_\rho : \nabla z_\rho dx = - \int_{\Omega_\rho} (\nabla(V_\rho + W) \cdot z_\rho) \cdot z_\rho dx \\ + & \int_{\Omega_\rho} [-\nu \nabla W : \nabla z_\rho + (f_\rho - \nabla W \cdot V_\rho - \nabla V_\rho \cdot W - \nabla W \cdot W) \cdot z_\rho] dx. \end{aligned}$$

Lemma 7.6 and the Schwarz inequality yield

$$\begin{aligned} \nu |z_\rho|_{1,\Omega_\rho}^2 & \leq k|V_\rho|_{1,\Omega_\rho} |z_\rho|_{1,\Omega_\rho}^2 + k|W|_{1,\Omega_\rho} |z_\rho|_{1,\Omega_\rho}^2 + \nu |W|_{1,\Omega_\rho} |z_\rho|_{1,\Omega_\rho} \\ & + \|f_\rho\|_{-1,\Omega_\rho} \|z_\rho\|_{1,\Omega_\rho} + c\|W\|_{1,\Omega_\rho} \|V_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \|z_\rho\|_{1,\Omega_\rho} + c|W|_{1,\Omega_\rho} \|W\|_{1,\Omega_\rho} \|z_\rho\|_{1,\Omega_\rho}, \end{aligned}$$

Where c denotes any positive constant depending only on n and Ω . Therefore, thanks to the Poincaré inequality and Lemma 7.7, we have provided that $\gamma \leq \alpha$

$$(\nu - k|V_\rho|_{1,\Omega_\rho} - k|W|_{1,\Omega_\rho})c \|z_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq c\nu \|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + \|f_\rho\|_{-1,\Omega_\rho} + c\nu \|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + c\|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2.$$

Yet, if $c_0\gamma \leq \nu/k - \beta$, c_0 being the constant of Lemma 7.8,

$$\nu - k|V_\rho|_{1,\Omega_\rho} - k|W|_{1,\Omega_\rho} > \nu - k\beta - kc_0\gamma > 0.$$

It follows that

$$\|z_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq c\nu \|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + c\|f_\rho\|_{-1,\Omega_\rho} + c\|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2.$$

Finally,

$$\begin{aligned} \|y_\rho\|_{1,\Omega_\rho} & \leq \|z_\rho\|_{1,\Omega_\rho} + \|W\|_{1,\Omega_\rho} \\ & \leq c\nu \|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma} + c\|f_\rho\|_{-1,\Omega_\rho} + c\|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma}^2 + c\|w\|_{\frac{1}{2},\Gamma}, \end{aligned}$$

which achieves the proof. \square

Lemma 7.9 (n=3) Consider $\varphi \in H^{1/2}(\partial\omega)^3$ with $\int_{\partial\omega} \varphi \cdot \mathbf{n} ds = 0$ and let $(v, p) \in W^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega})^3 \times L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega})$ be the solution to the problem :

$$\begin{cases} -\nu\Delta v + \nabla p = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}, \\ v \longrightarrow 0 & \text{at } \infty, \\ v = \varphi & \text{on } \partial\omega. \end{cases}$$

Then, denoting $D_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$ for any fixed radius R , there exists some constants $c(R, \Omega)$ such that

$$\begin{aligned} \|v\|_{0, \Omega_\rho/\rho} &\leq c\rho^{-1/2} \|\varphi\|_{1/2, \partial\omega}, \\ |v|_{1, D_R/\rho} &\leq c\rho^{1/2} \|\varphi\|_{1/2, \partial\omega}, \\ |v|_{1, \Omega_\rho/\rho} &\leq c \|\varphi\|_{1/2, \partial\omega}, \end{aligned}$$

Proof. See [10]. □

Lemma 7.10 (n=2) Consider $\varphi \in H^{1/2}(\partial\omega_\rho)^2$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)^2$ and let $(y_\rho, p_\rho) \in H^1(\Omega_\rho)^2 \times L^2(\omega_\rho)$ be the solution to the problem :

$$\begin{cases} -\nu\Delta y_\rho + \nabla p_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ \operatorname{div} y_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ y_\rho = \psi & \text{on } \Gamma, \\ y_\rho = \varphi & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

There exists some constants c independent of ρ such that

$$\|y_\rho\|_{1, \Omega_\rho} \leq c \|\psi\|_{1/2, \Gamma} + \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}} \|\varphi(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega}.$$

Proof. If φ is constant on $\partial\omega_\rho$ and $\psi = 0$, we come down to a circular hole by using a principle of minimization of the energy and we use then the explicit expression of the solution (see [17]). Next, the standard elliptic regularity brings the case $\psi \neq 0$. Let us now study the case where φ is not constant. Let V be the bounded solution to

$$\begin{cases} -\nu\Delta V + \nabla P_V = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \\ \operatorname{div} V = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\omega}, \\ V(x) = \varphi(\rho x) & \text{on } \partial\omega. \end{cases}$$

We have $V = \lambda + W$ with $\lambda \in \mathbb{R}$ and $W = O(1/r)$. Then, we split y_ρ into $W(x/\rho) + z_\rho$. The previous results apply to z_ρ and $W(x/\rho)$ satisfies the desired estimate. □

Lemma 7.11 (n=2) Consider $f_\rho \in H^{-1}(\Omega_\rho)^n$, $V_\rho \in H^1(\Omega_\rho)^n$ with $\operatorname{div} V_\rho = 0$ and $|V_\rho|_{1, \Omega_\rho} \leq \beta < \nu/k$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\omega_\rho)^2$ and $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)^2$ verifying $\int_\Gamma \psi \cdot \mathbf{n} ds = 0$. Let $(y_\rho, p_\rho) \in H^1(\Omega_\rho)^n \times L^2(\Omega_\rho)$ be a solution to the problem :

$$\begin{cases} -\nu\Delta y_\rho + \nabla y_\rho \cdot V_\rho + \nabla V_\rho \cdot y_\rho + \nabla y_\rho \cdot y_\rho + \nabla p_\rho = f_\rho & \text{in } \Omega_\rho, \\ \operatorname{div} y_\rho = 0 & \text{in } \Omega_\rho, \\ y_\rho = \psi & \text{on } \Gamma, \\ y_\rho = \varphi & \text{on } \partial\omega_\rho. \end{cases}$$

There exists some constants $\gamma = \gamma(n, \Omega)$ and $c = c(n, \Omega)$ such that if $\|w\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \leq \gamma$, then

$$\|y_\rho\|_{1, \Omega_\rho} \leq c\|f_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} + \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}} \|\varphi(\rho x)\|_{\frac{1}{2}, \partial\omega} + c(1 + \nu)\|\psi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} + c\|\psi\|_{\frac{1}{2}, \Gamma}^2.$$

Proof. It is a combination of Lemmas 7.10 and 7.8. \square

In the sequel, c denotes any positive constant that may depend on Ω , ν and U but never on ρ . We recall that R denotes a positive radius such that $\overline{B(0, R)} \subset \Omega$ and $D_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$.

7.5.2 Proof of Theorem 7.2 (Topological sensitivity in 3D)

Error estimate on the solution

It is divided in several steps.

1. *Estimate of h_ρ .* Lemma 7.9 and a change of variable yield

$$\begin{aligned} \|h_\rho\|_{0, \Omega_\rho} &\leq c\rho, \\ |h_\rho|_{1, D_R} &\leq c\rho, \\ |h_\rho|_{1, \Omega_\rho} &\leq c\rho^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.29}$$

2. *Estimate of r_ρ .* As $|u_0|_{1, \Omega} < \nu/k$, we have for ρ sufficiently small

$$|u_0 + h_\rho|_{1, \Omega_\rho} \leq \alpha < \nu/k.$$

Thus, by Lemma 7.8,

$$\begin{aligned} \|r_\rho\|_{1, \Omega_\rho} &\leq c\|-\nabla h_\rho \cdot u_0 - \nabla u_0 \cdot h_\rho - \nabla h_\rho \cdot h_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} + c(1 + \nu)\|h_\rho\|_{1/2, \Gamma} + c\|h_\rho\|_{1/2, \Gamma}^2 \\ &\leq c\|\nabla h_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} + c\|h_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} + c\|\nabla h_\rho \cdot h_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} + c(1 + \nu)\|h_\rho\|_{1/2, \Gamma} + c\|h_\rho\|_{1/2, \Gamma}^2, \end{aligned}$$

since $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Yet

$$\|\nabla h_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} \leq \|h_\rho\|_{0, \Omega_\rho}.$$

Moreover, using Lemma 7.6, we obtain immediately that

$$\|\nabla h_\rho \cdot h_\rho\|_{-1, \Omega_\rho} \leq c|h_\rho|_{1, \Omega_\rho}\|h_\rho\|_{1, \Omega_\rho}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} \|r_\rho\|_{1, \Omega_\rho} &\leq c\|h_\rho\|_{0, \Omega_\rho} + c|h_\rho|_{1, \Omega_\rho}\|h_\rho\|_{1, \Omega_\rho} + c(1 + \nu)\|h_\rho\|_{1/2, \Gamma} + c\|h_\rho\|_{1/2, \Gamma}^2 \\ &\leq c\rho. \end{aligned} \tag{7.30}$$

3. *Estimate of S_ρ .* Lemma 7.9 and a Taylor expansion of u_0 computed at the origin yield

$$\begin{aligned} \|S_\rho\|_{0, \Omega_\rho/\rho} &\leq c\rho^{1/2}, \\ |S_\rho|_{1, D_R/\rho} &\leq c\rho^{3/2}, \\ |S_\rho|_{1, \Omega_\rho/\rho} &\leq c\rho. \end{aligned} \tag{7.31}$$

Determination of δ_{F1}

We will successively prove that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho)$ for all $i = 1, \dots, 4$.

1. As (u_0, p_0) and (v_0, q_0) are of class $\mathcal{C}^2 \times \mathcal{C}^1$ in a neighborhood of the origin, we have directly

$$|\mathcal{E}_1(\rho)| \leq c\rho^2.$$

2. We have by a change of variable

$$\mathcal{E}_2(\rho) = \rho \int_{\partial\omega} [\nu \partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x) \mathbf{n}] \cdot v_0(\rho x) ds.$$

Hence,

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq c\rho \|\nu \partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x) \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\omega}.$$

Let B be a ball such that $\bar{\omega} \subset B$ and $\bar{B} \subset \Omega$. For all $\varphi \in H^1(B \setminus \bar{\omega})^3$ with $\operatorname{div} \varphi = 0$ and $\varphi|_{\partial B} = 0$ we have by the Green formula

$$\begin{aligned} & -\nu \int_{\partial\omega} [\nu \partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x) \mathbf{n}] \cdot \varphi ds \\ = & \int_{B \setminus \bar{\omega}} \rho^2 (\nu \Delta r_\rho(\rho x) - \nabla p''_\rho(\rho x)) \cdot \varphi dx + \int_{B \setminus \bar{\omega}} \rho \nu \nabla r_\rho(\rho x) \cdot \nabla \varphi dx \\ = & \rho^2 \int_{B \setminus \bar{\omega}} [\nabla r_\rho \cdot (u_0 + h_\rho) + \nabla(u_0 + h_\rho) \cdot r_\rho + \nabla r_\rho \cdot r_\rho + \nabla h_\rho \cdot u_0 + \nabla u_0 \cdot h_\rho \\ & + \nabla h_\rho \cdot h_\rho](\rho x) \cdot \varphi dx + \rho \nu \int_{B \setminus \bar{\omega}} \nabla r_\rho(\rho x) \cdot \nabla \varphi dx \\ = & \rho \int_{B \setminus \bar{\omega}} [\nabla R_\rho \cdot (U_0 + H_\rho) + \nabla(U_0 + H_\rho) \cdot R_\rho + \nabla R_\rho \cdot R_\rho + \nabla H_\rho \cdot U_0 + \nabla U_0 \cdot H_\rho \\ & + \nabla H_\rho \cdot H_\rho] \cdot \varphi dx + \nu \int_{B \setminus \bar{\omega}} \nabla R_\rho \cdot \nabla \varphi dx, \end{aligned}$$

where $R_\rho(x) = r_\rho(\rho x)$, $H_\rho(x) = H_\rho(\rho x)$ and $U_\rho(x) = u_\rho(\rho x)$. Then, by Lemma 7.6 and the Poincaré inequality,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\omega} [\nu \partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x) \mathbf{n}] \cdot \varphi ds \right| \\ \leq & c\rho [|R_\rho| \cdot |U_0 + H_\rho| + |U_0 + H_\rho| |R_\rho| + |R_\rho| |R_\rho| + |H_\rho| |U_0 + H_\rho| + |U_0| |H_\rho|] \|\varphi\| \\ & + c |R_\rho| \|\varphi\|, \end{aligned}$$

where all the norms and semi-norms are taken in $H^1(B \setminus \bar{\omega})$. Next,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\omega} [\nu \partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x) \mathbf{n}] \cdot \varphi ds \right| \\ \leq & c\rho [|R_\rho| (|U_0 + H_\rho| + |R_\rho|) + |H_\rho| |U_0 + H_\rho| + |U_0| |H_\rho| + \rho^{-1} |R_\rho|] \|\varphi\| \\ \leq & c\rho [|R_\rho| (1 + |H_\rho| + |R_\rho|) + |H_\rho| (1 + |H_\rho|) + \|H_\rho\| + \rho^{-1} |R_\rho|] \|\varphi\|, \end{aligned}$$

since U_0 is of class C^1 in $B \setminus \bar{\omega}$. A new change of variables and Equations (7.29) and (7.30) yield

$$\left| \int_{\partial\omega} [\nu \partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x) \mathbf{n}] \cdot \varphi ds \right| \leq c\rho^{1/2} \|\varphi\|_{1/2, \partial\omega}$$

Finally,

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq c\rho^{3/2}.$$

3. We have

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_3(\rho)| &\leq c\rho \|\nu \partial_n S_\rho - P''_\rho \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\omega} \|v_0(\rho x)\|_{1/2, \partial\omega} \\ &\leq c\rho |S_\rho|_{1, B \setminus \bar{\omega}} \\ &\leq c\rho^2. \end{aligned}$$

4. A Taylor expansion of v_0 yields straightforwardly

$$|\mathcal{E}_4(\rho)| \leq c\rho^2.$$

Determination of δ_{F_2}

Let us now prove that $\delta_{F_2} = 0$. We have

$$\begin{aligned} V_F(u_\rho - u_0) &:= \langle F_0(u_\rho) - F_0(u_0) - DF_0(u_0)(u_\rho - u_0), v_0 \rangle_{\mathcal{V}'_0, \mathcal{V}_0} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla(u_\rho - u_0) \cdot (u_\rho - u_0)) \cdot v_0 dx. \end{aligned}$$

An integration by parts and the fact that $\operatorname{div}(u_\rho - u_0) = 0$ yield

$$V_F(u_\rho - u_0) = - \int_{\Omega} (\nabla v_0 \cdot (u_\rho - u_0)) \cdot (u_\rho - u_0) dx.$$

Thus,

$$\begin{aligned} |V_F(u_\rho - u_0)| &\leq \|\nabla v_0\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\rho - u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\nabla v_0\|_{L^\infty(\Omega)} (\|u_\rho - u_0\|_{L^2(\Omega_\rho)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\omega_\rho)}^2) \\ &\leq \|\nabla v_0\|_{L^\infty(\Omega)} [(\|h_\rho\|_{L^2(\Omega_\rho)} + \|r_\rho\|_{L^2(\Omega_\rho)})^2 + \|u_0\|_{L^2(\omega_\rho)}^2] \\ &\leq (c\rho + c\rho)^2 + c\rho^3 \\ &\leq c\rho^2. \end{aligned}$$

Hence $\delta_{F_2} = 0$.

7.5.3 Proof of Theorem 7.3 (Topological sensitivity in 2D)

Error estimates on the solution

1. Thanks to the implicit mapping theorem applied to the variational formulation of Problem (7.26) in $\rho = 0$, we obtain easily that

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \|H_\rho - H_0\|_{1, \Omega} = 0.$$

Hence,

$$\|H_\rho\|_{1,\Omega} \leq c.$$

Furthermore, the definition of H provides

$$\begin{cases} \|H\|_{0,\Omega} \leq c, \\ \|H\|_{1,D_R} \leq c, \\ |H|_{1,\Omega_\rho} \leq c\sqrt{-\ln \rho} \\ \|H\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c \quad \forall p \in]1, 2[. \end{cases}$$

Therefore,

$$\begin{cases} \|h_\rho\|_{0,\Omega_\rho} \leq \frac{c}{-\ln \rho}, \\ \|h_\rho\|_{1,D_R} \leq \frac{c}{-\ln \rho}, \\ |h_\rho|_{1,\Omega_\rho} \leq \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}}. \end{cases} \quad (7.32)$$

Next, we have

$$-\nu\Delta H_\rho + \nabla P_\rho = f_\rho$$

with

$$\begin{aligned} f_\rho &= -\nabla H_\rho \cdot (u_0 - \frac{1}{\ln \rho} H) - (\nabla u_0 - \frac{1}{\ln \rho} \nabla H) \cdot H_\rho - \frac{1}{\ln \rho} \nabla H_\rho \cdot H_\rho \\ &\quad - \nabla u_0 \cdot H - \nabla H \cdot u_0 - \frac{1}{\ln \rho} \nabla H \cdot H. \end{aligned}$$

Using the Hölder inequality, we obtain that for any $q \in]1, 2[$,

$$\|f_\rho\|_{L^q(\Omega)} \leq c.$$

Then, a regularity property (see [19]) yields

$$\begin{cases} \|H_\rho\|_{W^{2,q}(\Omega)} \leq c, \\ \|P_\rho\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c. \end{cases}$$

2. Due to Lemma 7.11, we have

$$\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}} \|(-u_0 - h_\rho)(\rho x)\|_{1/2,\partial\omega}.$$

Yet,

$$\begin{aligned} (-u_0 - h_\rho)(\rho x) &= -u_0(\rho x) - \frac{1}{\ln \rho} [(\ln(\rho r)I - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T)u_0(0) - H_\rho(\rho x)] \\ &= -u_0(\rho x) + u_0(0) + \frac{1}{\ln \rho} [(\ln r I - \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r^T)u_0(0) - H_\rho(\rho x)]. \end{aligned}$$

Hence, using that $W^{2,q}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, we obtain

$$\|(-u_0 - h_\rho)(\rho x)\|_{1/2,\partial\omega} \leq c\rho + \frac{c}{-\ln \rho} \leq \frac{c}{-\ln \rho}.$$

It follows that

$$\|r_\rho\|_{1,\Omega_\rho} \leq \frac{c}{(-\ln \rho)^{3/2}}. \quad (7.33)$$

Determination of δ_{F1}

We must prove that $|\mathcal{E}_i(\rho)| = o(\rho)$ for all $i = 1, \dots, 4$.

1. We obtain immediately by using a Taylor expansion that

$$|\mathcal{E}_1(\rho)| \leq c\rho^2.$$

2. We have by a change of variable

$$\mathcal{E}_2(\rho) = \int_{\partial\omega} [\nu\partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x)\mathbf{n}] \cdot v_0(\rho x) ds.$$

Hence,

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq c \|\nu\partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x)\mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\omega}.$$

Let B be a ball such that $\bar{\omega} \subset B$ and $\bar{B} \subset \Omega$. For all $\varphi \in H^1(B \setminus \bar{\omega})^2$ with $\operatorname{div} \varphi = 0$ and $\varphi|_{\partial B} = 0$ we have by the Green formula

$$\begin{aligned} & -\nu \int_{\partial\omega} [\nu\partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x)\mathbf{n}] \cdot \varphi ds \\ &= \int_{B \setminus \bar{\omega}} \rho^2 (\nu\Delta r_\rho(\rho x) - \nabla p''_\rho(\rho x)) \cdot \varphi dx + \int_{B \setminus \bar{\omega}} \rho\nu \nabla r_\rho(\rho x) \cdot \nabla \varphi dx \\ &= \rho^2 \int_{B \setminus \bar{\omega}} [\nabla r_\rho \cdot (u_0 + h_\rho) + \nabla(u_0 + h_\rho) \cdot r_\rho + \nabla r_\rho \cdot r_\rho](\rho x) \cdot \varphi dx \\ & \quad + \rho\nu \int_{B \setminus \bar{\omega}} \nabla r_\rho(\rho x) \cdot \nabla \varphi dx. \end{aligned}$$

A change of variable, Lemma 7.6 and the Poincaré inequality bring

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\omega} [\nu\partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x)\mathbf{n}] \cdot \varphi ds \right| \\ & \leq c\rho [|r_\rho(\rho x)| \cdot \|(u_0 + h_\rho)(\rho x)\| + |(u_0 + h_\rho)(\rho x)| \|r_\rho(\rho x)\| + |r_\rho(\rho x)| \|r_\rho(\rho x)\|] \|\varphi\| \\ & \quad + c|r_\rho(\rho x)| \|\varphi\|, \end{aligned}$$

where all the norms and semi-norms are taken in $H^1(B \setminus \bar{\omega})$. Next, easy manipulations yield

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial\omega} [\nu\partial_n(r_\rho(\rho x)) - \rho p''_\rho(\rho x)\mathbf{n}] \cdot \varphi ds \right| \\ & \leq [c|r_\rho|_{1, \Omega_\rho} + c\|r_\rho\|_{1, \Omega_\rho} + c|r_\rho|_{1, \Omega_\rho} \|r_\rho\|_{1, \Omega_\rho}] \|\varphi\| \\ & \leq \frac{c}{(-\ln \rho)^{3/2}} \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Finally,

$$|\mathcal{E}_2(\rho)| \leq \frac{c}{(-\ln \rho)^{3/2}}.$$

3. A change of variable and a Taylor expansion of v_0 computed at the origin yield

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq c\rho \|\nu \partial_n(h_\rho(\rho x)) - \rho p'_\rho(\rho x) \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\omega}.$$

Then, arguing as for the estimation of $\mathcal{E}_2(\rho)$, we obtain that

$$\|\nu \partial_n(h_\rho(\rho x)) - \rho p'_\rho(\rho x) \mathbf{n}\|_{-1/2, \partial\omega} \leq c|h_\rho|_{1, \Omega_\rho} \leq \frac{c}{\sqrt{-\ln \rho}},$$

from which we deduce

$$|\mathcal{E}_3(\rho)| \leq \frac{c\rho}{\sqrt{-\ln \rho}}.$$

4. We have

$$\mathcal{E}_4(\rho) = \frac{-1}{\ln \rho} \int_{\omega_\rho} (\nu \Delta H_\rho - \nabla P_\rho) dx.$$

For a chosen $q \in]0, 1[$, the Hölder inequality yields

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_4(\rho)| &\leq \frac{-c}{\ln \rho} (\|H_\rho\|_{W^{2,q}(\Omega)} + \|P_\rho\|_{W^{1,q}(\Omega)}) \|1\|_{L^{q/(q-1)}(\omega_\rho)} \\ &\leq \frac{-c}{\ln \rho} \rho^{2-2/q}. \end{aligned}$$

Determination of δ_{F2}

The proof is similar to the 3D case.

7.5.4 Proof of Theorem 7.4 (Examples of cost function)

A preliminary estimate

The following estimate is valid in dimensions 2 and 3.

Lemma 7.12 *We have*

$$\begin{aligned} \|u_\rho - u_0\|_{1, D_R} &= O(f(\rho)), \\ \|u_\rho - u_0\|_{0, \Omega} &= O(f(\rho)). \end{aligned}$$

We recall that $f(\rho) = \rho$ in 3D, $f(\rho) = -1/\ln \rho$ in 2D and u_ρ is extended by zero inside ω_ρ .

Proof. In both Sections 7.3.3 and 7.3.4, we have split $u_\rho - u_0$ in the domain Ω_ρ into $h_\rho + r_\rho$ and we have proved that

$$\begin{cases} \|h_\rho\|_{1, D_R} = O(f(\rho)), \\ \|h_\rho\|_{0, \Omega_\rho} = O(f(\rho)), \\ \|r_\rho\|_{1, \Omega_\rho} = O(f(\rho)). \end{cases}$$

Those inequalities and the fact that $\|u_0\|_{0, \omega_\rho} = O(f(\rho))$ provide the sought estimate. \square

Let us now turn to the proof of Theorem 7.4. The three examples of cost function are studied successively.

1. This result is an immediate consequence of the differentiability of J and Lemma 7.12.
2. On the one hand, we have

$$J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho) = - \int_{\omega_\rho} |u_d|^2 dx.$$

From the Hölder inequality and the assumption made on the regularity of u_d , we obtain the existence of some $\varepsilon > 0$ such that

$$|J_\rho(u_\rho) - J_0(u_\rho)| \leq c\rho^{n-2+\varepsilon} = o(f(\rho)).$$

Hence $\delta_{J_1} = 0$. On the other hand, we have

$$J_0(u_\rho) - J_0(u_0) = DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) + \int_{\Omega} |u_\rho - u_0|^2 dx.$$

According to Lemma 7.12, this latter term behaves like a $o(f(\rho))$ and consequently $\delta_{J_2} = 0$.

3. We prove that $\delta_{J_1} = 0$ in a very similar manner to the previous case. Let us study the case of δ_{J_2} which is more technical. As previously, the calculus gives

$$\begin{aligned} V_J(u_\rho - u_0) &:= J_0(u_\rho) - J_0(u_0) - DJ_0(u_0)(u_\rho - u_0) \\ &= \nu \int_{\Omega} |\nabla(u_\rho - u_0)|^2 dx \\ &= \nu \int_{\Omega_\rho} |\nabla(h_\rho + r_\rho)|^2 dx + \nu \int_{\omega_\rho} |\nabla u_0|^2 dx. \end{aligned}$$

Thanks to the boundedness of ∇u_0 , this latter term is a $o(f(\rho))$.

- (a) Let us first study the 3D case. It follows from estimates (7.29) and (7.30) that

$$V_J(u_\rho - u_0) = \nu \int_{\Omega_\rho} |\nabla h_\rho|^2 dx + o(f(\rho)).$$

The Green formula and a change of variable yield successively

$$\begin{aligned} V_J(u_\rho - u_0) &= - \int_{\partial\omega_\rho} (\nu\partial_n h_\rho - p'_\rho \mathbf{n}) \cdot h_\rho ds + o(f(\rho)) \\ &= -\rho \int_{\partial\omega} (\nu\partial_n H_\rho - P'_\rho \mathbf{n}) \cdot H_\rho ds + o(f(\rho)). \end{aligned}$$

Using estimate (7.31), we obtain

$$V_J(u_\rho - u_0) = -\rho \int_{\partial\omega} (\nu\partial_n H - P \mathbf{n}) \cdot H ds + o(f(\rho)).$$

Then, by the jump relation of the single layer potential,

$$V_J(u_\rho - u_0) = -\rho \int_{\partial\omega} \eta \cdot u_0(0) ds + o(f(\rho)),$$

from which we deduce the expression of δ_{J_2} .

(b) In 2D, the first step consists in applying the Green formula, which brings

$$V_J(u_\rho - u_0) = - \int_{\partial\omega_\rho} [\nu\partial_n(h_\rho + r_\rho) - (p'_\rho + p''_\rho)\mathbf{n}].u_0 ds + o(f(\rho)).$$

Arguing as for the estimation of $\mathcal{E}_2(\rho)$, $\mathcal{E}_3(\rho)$ and $\mathcal{E}_4(\rho)$, we obtain successively

$$\begin{aligned} V_J(u_\rho - u_0) &= - \int_{\partial\omega_\rho} (\nu\partial_n h_\rho - p'_\rho \mathbf{n}).u_0 ds + o(f(\rho)) \\ &= - \int_{\partial\omega_\rho} (\nu\partial_n h_\rho - p'_\rho \mathbf{n}).u_0(0) ds + o(f(\rho)) \\ &= - \frac{-1}{\ln \rho} \int_{\partial\omega_\rho} (\nu\partial_n H - P\mathbf{n}).u_0(0) ds + o(f(\rho)). \end{aligned}$$

Finally, using (7.25) and the fact that (E, Π) is a fundamental solution, this latter expression reads also

$$V_J(u_\rho - u_0) = \frac{-1}{\ln \rho} 4\pi\nu |u_0(0)|^2 + o(f(\rho)),$$

which provides the expected value of δ_{J_2} .

References

- [1] G. ALLAIRE, *Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. I. Abstract framework, a volume distribution of holes*, Arch. Rational Mech. Anal. 113(3), pp. 209-259, 1990.
- [2] G. ALLAIRE, *Homogenization of the Navier-Stokes equations in open sets perforated with tiny holes. II. Noncritical sizes of the holes for a volume distribution and a surface distribution of holes*, Arch. Rational Mech. Anal. 113(3), pp. 261-298, 1990.
- [3] G. ALLAIRE, *Shape optimization by the homogenization method*, Springer, Applied Mathematical Sciences Vol. 146, 2002.
- [4] S. AMSTUTZ, *The topological asymptotic for the Helmholtz equation : insertion of a hole, a crack and a dielectric object*, Rapport MIP no. 03-05, 2003.
- [5] M. BENDSOE, *Optimal topology design of continuum structure : an introduction*, Technical report, Departement of mathematics, Technical University of Denmark, DK2800 Lyngby, Denmark, 1996.
- [6] R. DAUTRAY AND J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, collection CEA, 1987.
- [7] G. GALDI, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes Equations*, Vol. I and II, Springer-Verlag Vol. 39, 1994.
- [8] S. GARREAU, PH. GUILLAUME AND M. MASMOUDI, *The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case*, SIAM J. Control Optim., 39(6), pp. 1756-1778, 2001.
- [9] PH. GUILLAUME, K. SID IDRIS, *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet problem*, SIAM J. Control. Optim. 41(4), pp. 1052-1072, 2002.
- [10] PH. GUILLAUME, K. SID IDRIS, *Topological sensitivity and shape optimization for the Stokes equations*, Rapport MIP no. 01-24, 2001.
- [11] M. HASSINE, M. MASMOUDI, *The topological asymptotic expansion for the quasi-Stokes problem*, Accepted in COCV.
- [12] J. JACOBSEN, N. OLHOFF AND E. RONHOLT, *Generalized shape optimization of three-dimensionnal structures using materials with optimum microstructures*, Technical report, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, DK-9920 Aalborg, Denmark, 1996.
- [13] M. MASMOUDI, *The Topological Asymptotic*, Computational Methods for Control Applications, R. Glowinski, H. Kawarada and J. Periaux eds., GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. Vol. 16, pp. 53-72, 2001.

- [14] B. SAMET, S. AMSTUTZ AND M. MASMOUDI, *The topological asymptotic for the Helmholtz equation*, Accepted in SIAM J. Control. Optim.
- [15] B. SAMET, J. POMMIER, *The topological asymptotic for the Helmholtz equation with Dirichlet condition on the boundary of an arbitrary shaped hole*, Rapport MIP no. 03-07, 2003.
- [16] A. SCHUMACHER, *Topologieoptimisierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Topchpositionierungskriterien*, Thesis, Universität-Gesamthochschule-Siegen, 1995.
- [17] K. SID IDRIS, *Sensibilité topologique en optimisation de forme*, Thèse de l'INSA Toulouse, 2001.
- [18] J. SOKOLOWSKI AND A. ZOCHOWSKI, *On the topological derivative in shape optimization*, SIAM J. Control Optim., 37, pp. 1241-1272, 1999.
- [19] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, Elsevier, 1984.

Chapitre 8

Complément sur les aspects numériques

Présentation du chapitre

L'objectif de ce chapitre est de compléter l'étude numérique en effectuant une comparaison de différentes méthodes.

- Dans un premier temps, nous nous concentrons sur une approche en une seule itération. Il s'agit de comparer les propriétés des gradients topologiques isotrope (trou circulaire) et anisotrope (fissure droite), ainsi que de tester numériquement les formules relatives à l'insertion d'une inhomogénéité. Cette étude est réalisée dans la section 8.3. Préalablement, nous montrons dans la section 8.2, sur un exemple simple où tous les calculs peuvent être faits à la main, que l'orientation des fissures utilisée dans le chapitre 2 n'est pas forcément la meilleure, justifiant ainsi l'essai d'une autre orientation. Cet exemple a cependant la particularité d'avoir un gradient topologique à l'ordre 1 identiquement nul, ce qui nécessite le calcul du terme suivant. C'est l'objet de la section 8.1.
- Puis, dans la section 8.4, nous décrivons et comparons différents algorithmes itératifs de type Krylov. Nous partons du principe qu'un problème d'optimisation topologique discrétisé peut se ramener à minimiser une fonctionnelle

$$j(\alpha) = J(u(\alpha))$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^P$ est un paramètre géométrique (variable de contrôle) et $u(\alpha) \in \mathbb{R}^N$ (ou \mathbb{C}^N) est la solution d'un système matriciel. La méthode a priori naturelle (appelée par la suite "méthode directe") consiste à minimiser $j(\alpha)$ sans se préoccuper de la structure particulière de j . Une autre idée est suggérée par le fait que le second membre du problème adjoint utilisé pour le calcul des dérivées de j fait intervenir la quantité $-DJ(u(\alpha))^T$ que nous pouvons interpréter comme une direction de descente du problème de minimisation de $J(u)$. Nous montrons que sous certaines conditions et pour un choix bien particulier du produit scalaire sur \mathbb{R}^N (ou \mathbb{C}^N), l'utilisation de la méthode directe de la plus forte pente revient à projeter orthogonalement le vecteur $-DJ(u(\alpha))^T$ sur le plan tangent à $\{u(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}^P\}$. La substitution de $-DJ(u(\alpha))^T$ par une combinaison linéaire de type Krylov donne lieu à de nouveaux algorithmes que nous qualifierons d' "indirects". Il s'agit de méthodes expérimentales dont le support théorique pourrait

être considérablement approfondi. Les essais numériques mériteraient également d'être complétés.

8.1 Asymptotique topologique à l'ordre 2

Nous nous intéressons dans cette section à des problèmes d'optimisation topologique où l'état initial se situe au niveau d'un extremum local de la fonction coût. L'état adjoint est nul ainsi que le gradient topologique. Nous nous proposons de rechercher le terme d'ordre supérieur en utilisant un état adjoint du second ordre.

Nous nous plaçons dans le contexte d'un problème linéaire avec condition de Neumann. Nous adoptons le cadre formel de la section 4.2.

8.1.1 Etats directs

Nous rappelons les hypothèses suivantes.

– Le problème perturbé s'écrit sous la forme

$$a_\rho(u_\rho, v) = l_\rho(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho, \quad (8.1)$$

où \mathcal{V}_ρ est un espace fonctionnel sur $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{\omega_\rho}$.

– L'état direct u_0 vérifie l'équation variationnelle

$$\tilde{a}_\rho(u_0|_{\Omega_\rho}, v) = \tilde{l}_\rho(v), \quad \forall v \in \mathcal{V}_\rho. \quad (8.2)$$

8.1.2 Fonction coût et états adjoints

Nous considérons une fonction coût du type :

$$J(u) = | \langle A, u|_{\Omega_R} \rangle + b |^2 \quad (8.3)$$

où $\Omega_R = \Omega \setminus \overline{B(0, R)}$, $A \in \mathcal{V}_R'$, $\mathcal{V}_R = \{u|_{\Omega_R}, u \in \mathcal{V}_0\}$ et $b \in \mathbb{C}$. Nous définissons les états adjoints seconds avec et sans trou par :

$$\begin{aligned} a_\rho(h, w_\rho) &= - \langle A, h|_{\Omega_R} \rangle & \forall h \in \mathcal{V}_\rho, \\ a_0(h, w_0) &= - \langle A, h|_{\Omega_R} \rangle & \forall h \in \mathcal{V}_0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

8.1.3 Hypothèses de variation de l'EDP

Nous supposons qu'il existe $\delta'_a, \delta'_l \in \mathbb{C}$ et $f(\rho)$ tendant vers 0 avec ρ tels que

$$(a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, w_\rho) = f(\rho)\delta'_a + o(f(\rho)), \quad (8.5)$$

$$(l_\rho - \tilde{l}_\rho)(w_\rho) = f(\rho)\delta'_l + o(f(\rho)). \quad (8.6)$$

8.1.4 Variation de la fonction coût

Elle est donnée par le théorème suivant.

Théorème 8.1 *Nous supposons que $J(u_0) = 0$. Alors, sous les hypothèses précédentes,*

$$J(u_\rho) - J(u_0) = f(\rho)^2 |\delta'_a - \delta'_l|^2 + o(f(\rho)^2).$$

Preuve. Etant donné que $\langle A, u_0 \rangle + b = 0$, nous avons

$$\begin{aligned} J(u_\rho) - J(u_0) &= |\langle A, u_\rho \rangle + b|^2 - 0 \\ &= |\langle A, u_\rho - u_0 \rangle|^2. \end{aligned}$$

Nous tirons successivement des relations (8.4), (8.1), (8.2), (8.5) et (8.6)

$$\begin{aligned} J(u_\rho) - J(u_0) &= |a_\rho(u_\rho - u_0, w_\rho)|^2 \\ &= |a_\rho(u_\rho, w_\rho) - a_\rho(u_0, w_\rho)|^2 \\ &= |l_\rho(w_\rho) - a_\rho(u_0, w_\rho)|^2 \\ &= |\tilde{l}_\rho(w_\rho) + (l_\rho - \tilde{l}_\rho)(w_\rho) - \tilde{a}_\rho(u_0, w_\rho) - (a_\rho - \tilde{a}_\rho)(u_0, w_\rho)|^2 \\ &= |f(\rho)\delta'_l - f(\rho)\delta'_a + o(f(\rho))|^2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons le résultat annoncé. □

8.1.5 Application à l'équation de Helmholtz

Du théorème précédent ainsi que des résultats établis au chapitre 4 qui nous fournissent les valeurs de δ'_a et δ'_l , nous déduisons les formules asymptotiques suivantes.

Théorème 8.2 *Nous supposons que la fonction coût est du type (8.3), que l'état adjoint second est défini par (8.4) et que $J(u_0) = 0$. Alors :*

- pour un trou circulaire $\omega_\rho = B(0, \rho)$ avec une condition de Neumann sur sa frontière,

$$j(\rho) - j(0) = \pi^2 \rho^4 |2\nabla u_0(0) \cdot \overline{\nabla w_0(0)} - k^2 u_0(0) \cdot \overline{w_0(0)}|^2 + o(\rho^4), \quad (8.7)$$

- pour une fissure rectiligne σ_ρ de longueur 2ρ et de normale \mathbf{n} avec une condition de Neumann sur ses deux faces,

$$j(\rho) - j(0) = \pi^2 \rho^4 |(\nabla u_0(0) \cdot \mathbf{n})(\overline{\nabla w_0(0) \cdot \mathbf{n}})|^2 + o(\rho^4). \quad (8.8)$$

8.2 Construction d'une parabole avec des fissures

A l'aide des formules d'asymptotique topologique relatives aux fissures, nous cherchons à déterminer la forme optimale d'un réflecteur qui, lorsqu'il est frappé par une onde plane, concentre un maximum d'énergie en un point. Nous aimerions bien sûr retrouver une parabole.

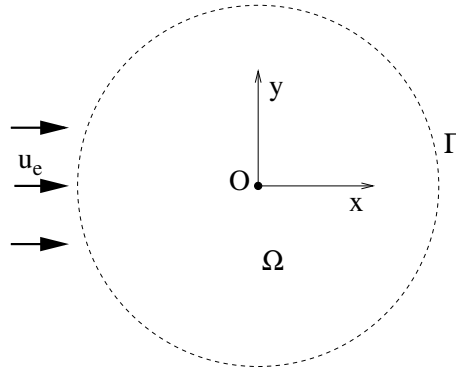


FIG. 8.1 – Géométrie initiale

8.2.1 Modélisation du problème direct

La géométrie initiale est donnée par la figure 8.1.

Nous considérons une onde incidente plane, monochromatique, progressive dans le sens des x croissants :

$$u_e = e^{ikx}.$$

Le problème direct initial est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u_0 - S u_0 = \partial_n u_e - S u_e & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

où S est l'opérateur Dirichlet-to-Neumann correspondant à la troncature de la condition de Sommerfeld sortante sur Γ . L'état direct est alors

$$u_0 = u_e = e^{ikx}.$$

8.2.2 Fonction coût et état adjoint

Etant donné un paramètre $\varepsilon > 0$ fixé pour l'instant, nous désirons maximiser la fonction coût

$$J^\varepsilon(u) = \left| \int_{\Omega} r^\varepsilon (u - u_0) dx \right|^2$$

où r^ε est un noyau régularisant qui, au sens des distributions, tend vers la mesure de Dirac en 0 lorsque ε tend vers 0. Son introduction est nécessaire pour que J^ε soit continue sur $H^1(\Omega)$. Nous allons utiliser l'état adjoint du second ordre de la section précédente avec

$$\langle A, u \rangle = \int_{\Omega} r^\varepsilon u dx \quad \text{et} \quad b = - \int_{\Omega} r^\varepsilon u_0 dx.$$

Un rapide calcul montre que l'état adjoint second est solution de :

$$\begin{cases} \Delta w_0^\varepsilon + \bar{k}^2 w_0^\varepsilon = r^\varepsilon & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n w_0^\varepsilon = S^* w_0^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

l'opérateur S^* étant l'adjoint de S . Soit w_0 la solution de

$$\begin{cases} \Delta w_0 + \bar{k}^2 w_0 = \delta_0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n w_0 = S^* w_0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Nous avons alors

$$w_0^\varepsilon = r^\varepsilon * w_0.$$

Sachant que, dans le cas de la condition de Sommerfeld, $S^* \varphi = \overline{S \varphi}$ pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, nous obtenons que $\overline{w_0}$ est solution de :

$$\begin{cases} \Delta \overline{w_0} + k^2 \overline{w_0} = \delta_0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \overline{w_0} = S \overline{w_0} & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Ainsi, en coordonnées polaires centrées en l'origine,

$$\overline{w_0} = H_0^{(1)}(kr),$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce (voir par exemple [1]).

8.2.3 Calcul de l'orientation optimale des fissures

D'après la formule (8.8), la variation de la fonction coût par rapport à l'insertion d'une petite fissure de longueur 2ρ au point de coordonnées (r, θ) est donnée par

$$\begin{aligned} J^\varepsilon(u_\rho) - J^\varepsilon(u_0) &= \pi^2 \rho^4 |(\nabla u_0(r, \theta) \cdot \mathbf{n})(\overline{\nabla w_0^\varepsilon(r, \theta)} \cdot \mathbf{n})|^2 + o(\rho^4) \\ &= \pi^2 \rho^4 |M^\varepsilon(r, \theta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|^2 + o(\rho^4), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} M^\varepsilon(r, \theta) &= \nabla u_0 \otimes \overline{\nabla w_0^\varepsilon} \\ &= \nabla u_0 \otimes (r^\varepsilon * \overline{\nabla w_0}) \end{aligned}$$

Posons

$$M(r, \theta) = \nabla u_0 \otimes \overline{\nabla w_0}.$$

Soient $\mathbf{n}_{\text{opt}}^\varepsilon(r, \theta)$ et $\mathbf{n}_{\text{opt}}(r, \theta)$ les solutions respectives des problèmes de maximisation

$$\max_{\|\mathbf{n}\|=1} |M^\varepsilon(r, \theta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}| \quad \text{et} \quad \max_{\|\mathbf{n}\|=1} |M(r, \theta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|.$$

Sachant que, à (r, θ) fixé, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M^\varepsilon(r, \theta) = M(r, \theta)$, on montre grâce au théorème des fonctions implicites appliqué au problème d'éléments propres que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{n}_{\text{opt}}^\varepsilon(r, \theta) = \mathbf{n}_{\text{opt}}(r, \theta).$$

Nous obtenons successivement, en coordonnées cartésiennes :

$$\nabla u_0 = ik e^{ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\nabla w_0} = -k H_1^{(1)}(kr) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} M(r, \theta) &= -ik^2 H_1^{(1)}(kr) e^{ikx} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= f(r, \theta) N(r, \theta) \end{aligned}$$

où N est une matrice à coefficients réels. Nous recherchons le vecteur unitaire réel \mathbf{n}_{opt} qui maximise la quantité

$$|M(r, \theta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}| = |f(r, \theta)| |N(r, \theta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}|.$$

Le vecteur \mathbf{n}_{opt} doit donc être un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre en valeur absolue de la matrice symétrique réelle

$$N_s(r, \theta) = \frac{N(r, \theta) + N^T(r, \theta)}{2}.$$

Les éléments propres de $N_s(r, \theta)$ sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\cos \theta + 1}{2}, & V_1 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 &= \frac{\cos \theta - 1}{2}, & V_2 &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

8.2.4 Construction d'une courbe optimale

Dans un premier temps, nous nous restreignons au demi-plan $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, la normale optimale est

$$\mathbf{n}_{\text{opt}} = V_1 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Nous recherchons une courbe qui, en chacun de ses points est normale à \mathbf{n}_{opt} . L'équation d'une telle courbe s'écrit

$$\begin{aligned} d\vec{M} \cdot \vec{n}_{\text{opt}} = 0 &\iff \frac{dr}{r} = \tan \frac{\theta}{2} d\theta \\ &\iff r = \frac{\alpha}{1 + \cos \theta}, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une parabole de foyer O .

Considérons maintenant le demi-plan des $x < 0$. Nous obtenons que la courbe optimale est un ensemble de deux arcs d'équation

$$r = \frac{\alpha}{(1 - \cos 3\theta)^{1/3}}.$$

Ces deux arcs admettent respectivement une direction asymptotique en $\theta = -2\pi/3$ et $\theta = 2\pi/3$. Nous avons représenté les trois morceaux de courbe sur la figure 8.2 pour $\alpha = 1$.

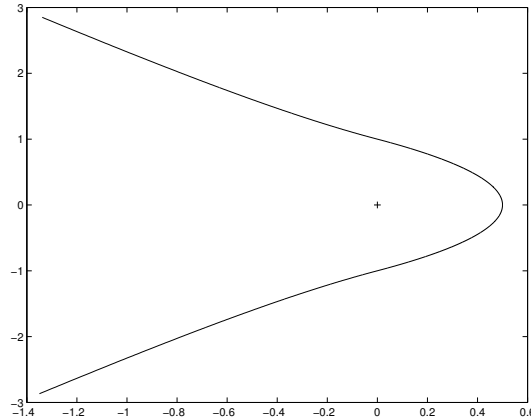


FIG. 8.2 – Géométrie obtenue

8.2.5 Conclusion

1. Nous n'avons obtenu que partiellement la parabole attendue. L'explication est la suivante : pour le gradient topologique, lorsque l'angle d'incidence de u_e avec la fissure élémentaire dépasse $\pi/4$, la diffraction l'emporte sur la réflexion. Ce problème est dû au fait que nous utilisons des formules valables pour une fissure infinitésimale alors que nous désirons construire une courbe de longueur finie.
2. A θ fixé, la valeur du gradient topologique correspondant à une orientation optimale est proportionnelle à $|H_0^{(1)}(kr)|^2$, fonction décroissante par rapport à r . Cela signifie que si l'on ne veut insérer qu'une seule petite fissure, on a intérêt à la placer le plus près possible de l'origine, ce qui est logique.

8.3 Optimisation topologique en une itération

8.3.1 Une nouvelle orientation des fissures

Nous souhaitons ici déterminer une orientation des fissures qui soit mieux adaptée à la construction d'une courbe de longueur finie. Nous supposons que la forme optimale que nous recherchons est un arc assez régulier et unique (ce qui n'est pas le cas de la section 8.2 où il y avait toute une famille de courbes optimales). Alors la fonction coût est stationnaire lors d'un déplacement de cet arc suivant sa normale. Nous choisissons d'orienter en chaque point la fissure pour que cette propriété soit satisfaite localement. Ainsi, pour l'équation de Helmholtz avec condition de Neumann et $\delta_J = 0$, nous voulons que la normale \mathbf{n} à la fissure insérée en x_0 vérifie

$$\frac{\partial}{\partial n} \Re \left[-\frac{\partial u_0}{\partial n} \overline{\frac{\partial v_0}{\partial n}} \right] (x_0) = 0,$$

soit

$$\Re \left[(\nabla^2 u_0(x_0) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \overline{(\nabla^2 v_0(x_0) \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}} + (\nabla u_0(x_0) \cdot \mathbf{n}) \overline{(\nabla v_0(x_0) \cdot \mathbf{n})} \right] = 0. \quad (8.9)$$

Nous avons le résultat d'existence suivant.

Lemme 8.3 *L'équation (8.9) admet au moins une solution $\mathbf{n}_{\text{opt}} \in \mathcal{S}_2$, la sphère unité de \mathbb{R}^2 .*

Preuve. Nous employons les notations suivantes :

$$\nabla u(x_0) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 u(x_0) = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{yx} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}.$$

L'équation (8.9) s'écrit alors

$$\begin{aligned} & \Re(u_{xx}\bar{v}_x + \bar{v}_{xx}u_x)n_x^3 + \Re(u_{xx}\bar{v}_y + \bar{v}_{xx}u_y + 2u_{xy}\bar{v}_x + 2\bar{v}_{xy}u_x)n_x^2n_y \\ & + \Re(u_{yy}\bar{v}_x + \bar{v}_{yy}u_x + 2u_{xy}\bar{v}_y + 2\bar{v}_{xy}u_y)n_xn_y^2 + \Re(u_{yy}\bar{v}_y + \bar{v}_{yy}u_y)n_y^3 = 0. \end{aligned}$$

- Il se peut que le vecteur $\mathbf{n} = (0, 1)^T$ soit solution.
- Sinon,

$$\Re(u_{yy}\bar{v}_y + \bar{v}_{yy}u_y) \neq 0.$$

Nous recherchons une solution sous la forme

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

L'équation devient :

$$\begin{aligned} & \Re(u_{xx}\bar{v}_x + \bar{v}_{xx}u_x) + \Re(u_{xx}\bar{v}_y + \bar{v}_{xx}u_y + 2u_{xy}\bar{v}_x + 2\bar{v}_{xy}u_x)y \\ & + \Re(u_{yy}\bar{v}_x + \bar{v}_{yy}u_x + 2u_{xy}\bar{v}_y + 2\bar{v}_{xy}u_y)y^2 + \Re(u_{yy}\bar{v}_y + \bar{v}_{yy}u_y)y^3 = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation polynomiale de degré 3 à coefficients réels : il y a au moins une racine réelle. □

Lorsque l'équation (8.9) admet plusieurs solutions, nous choisissons celle qui minimise le gradient topologique

$$g(x_0, \mathbf{n}) = -\Re \left((\nabla u_0(x_0) \cdot \mathbf{n}) (\overline{\nabla v_0(x_0) \cdot \mathbf{n}}) \right).$$

8.3.2 Optimisation d'un guide d'onde

Présentation du problème

Nous voulons construire un guide d'onde en T fonctionnant en plan E (polarisation différente du chapitre 3). La symétrie par rapport à l'axe médian nous permet de ne traiter que la moitié du guide (voir figure 8.3). En pointillés sont représentées l'entrée Γ_1 et la sortie Γ_2 . La partie de la frontière où est appliquée une condition de Neumann homogène est notée Γ_N (bord métallique et condition de symétrie), la partie où est appliquée une condition d'absorption Γ_a . Le problème est modélisé comme suit :

$$\begin{cases} \Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \partial_n u_0 - iku_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_a \cup \Gamma_2, \\ \partial_n u_0 - iku_0 = -2iku_e & \text{sur } \Gamma_1, \end{cases}$$

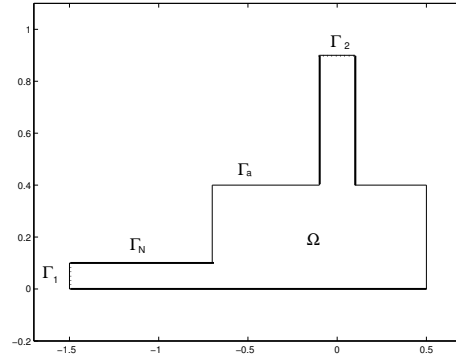


FIG. 8.3 – Géométrie initiale

où u_e , l'onde entrante, est constante sur Γ_1 (mode fondamental). Nous désirons maximiser la fonction coût

$$J(u) = |S_{12}(u)|^2 = \left| \int_{\Gamma_2} u ds \right|^2.$$

Lorsque k est réel, le problème adjoint s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_0 + k^2 \bar{v}_0 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n \bar{v}_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \partial_n \bar{v}_0 - ik \bar{v}_0 = 0 & \text{sur } \Gamma_a \cup \Gamma_1, \\ \partial_n \bar{v}_0 - ik \bar{v}_0 = -2\overline{S_{12}(u_0)} & \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

L'insertion d'obstacles métalliques correspond à une condition de Neumann. Les formules de sensibilité topologique sont donc celles du chapitre 4. Nous prenons $k = 10$. À l'état initial, la perte d'énergie est de -0.19 dB. Le domaine d'optimisation, c'est-à-dire le domaine où l'on accepte d'ajouter de la matière, est le rectangle $[-0.7, 0.5] \times [0, 0.4]$. La méthode consiste à calculer le gradient topologique et à choisir un seuil au delà duquel on met de la matière. Ce seuil est déterminé de manière à obtenir la meilleure valeur de la fonction coût (recherche linéaire effectuée manuellement). Les résultats sont donnés sur la figure 8.4 et le tableau 8.1.

Gradient topologique	Perte (dB)
Trou circulaire	-4.23
Fissure orientation classique	-5.68
Fissure nouvelle orientation	-7.28

TAB. 8.1 – Pertes obtenues

8.3.3 Inversion de forme pour un objet métallique

Il s'agit d'essais numériques complétant ceux présentés au chapitre 4 (plan E). Nous ne rappelons pas la modélisation du problème.

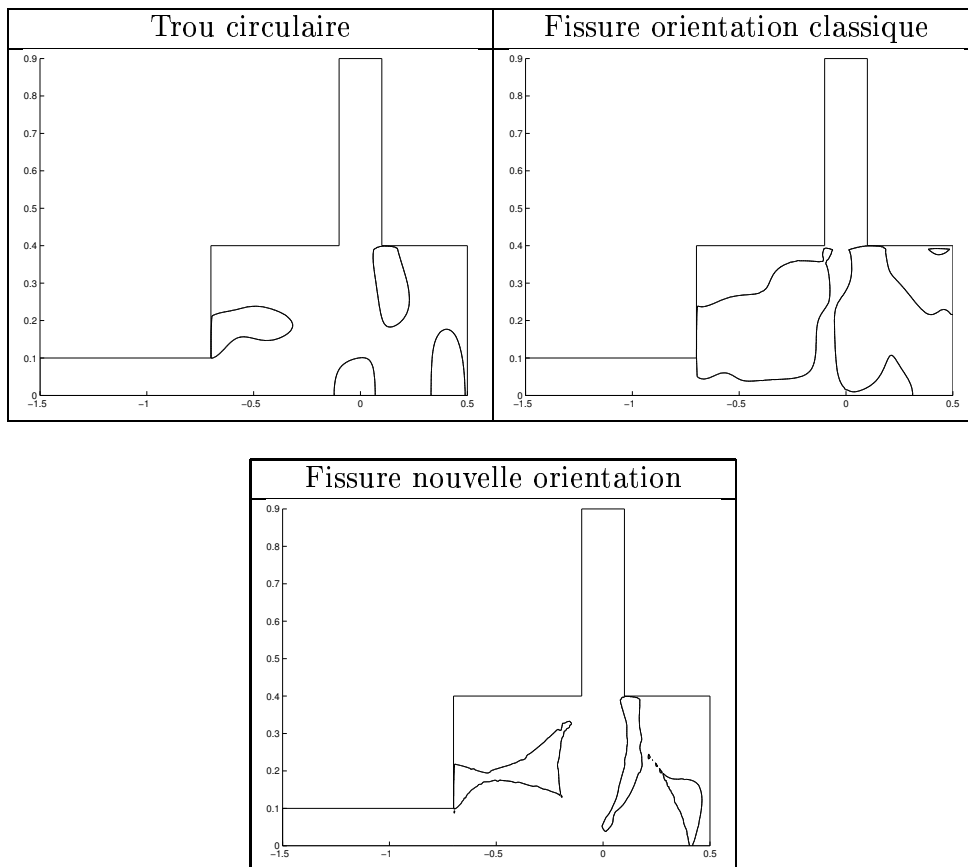


FIG. 8.4 – Ligne de niveau optimale du gradient topologique

Les résultats sont rassemblés sur les figures 8.5 et 8.6. L'objet est illuminé par 32 sources. Les tests correspondent à deux nombres d'ondes $k = 10$ (longueur d'onde $\lambda = 0.62$) et $k = 30$ ($\lambda = 0.21$) et trois gradients topologiques différents : trous circulaires, fissures "orientation classique" et fissures "nouvelle orientation". Comme pour l'optimisation du guide d'onde, nous nous intéressons aux lignes de niveau du gradient topologique.

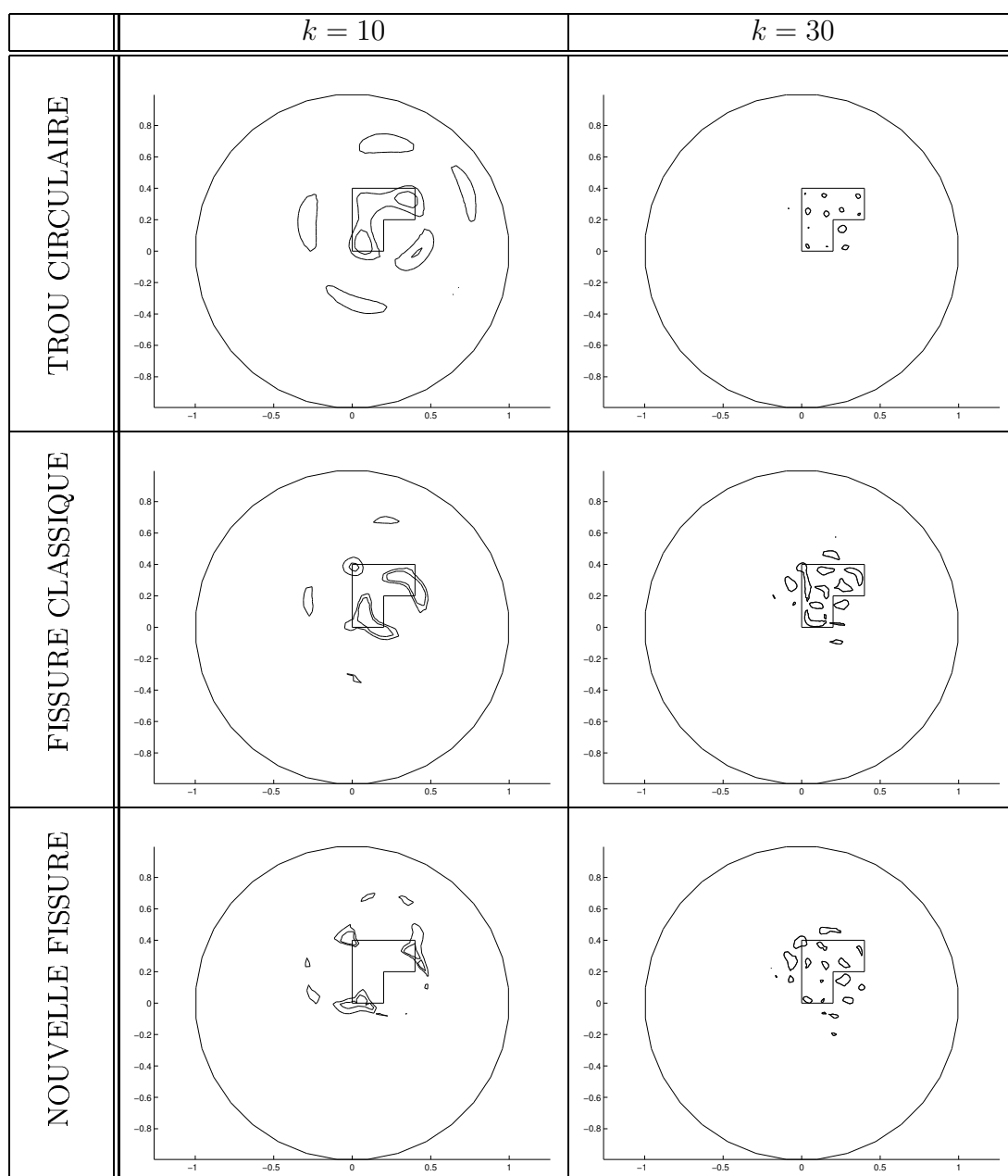


FIG. 8.5 – Lignes de niveau du gradient topologique

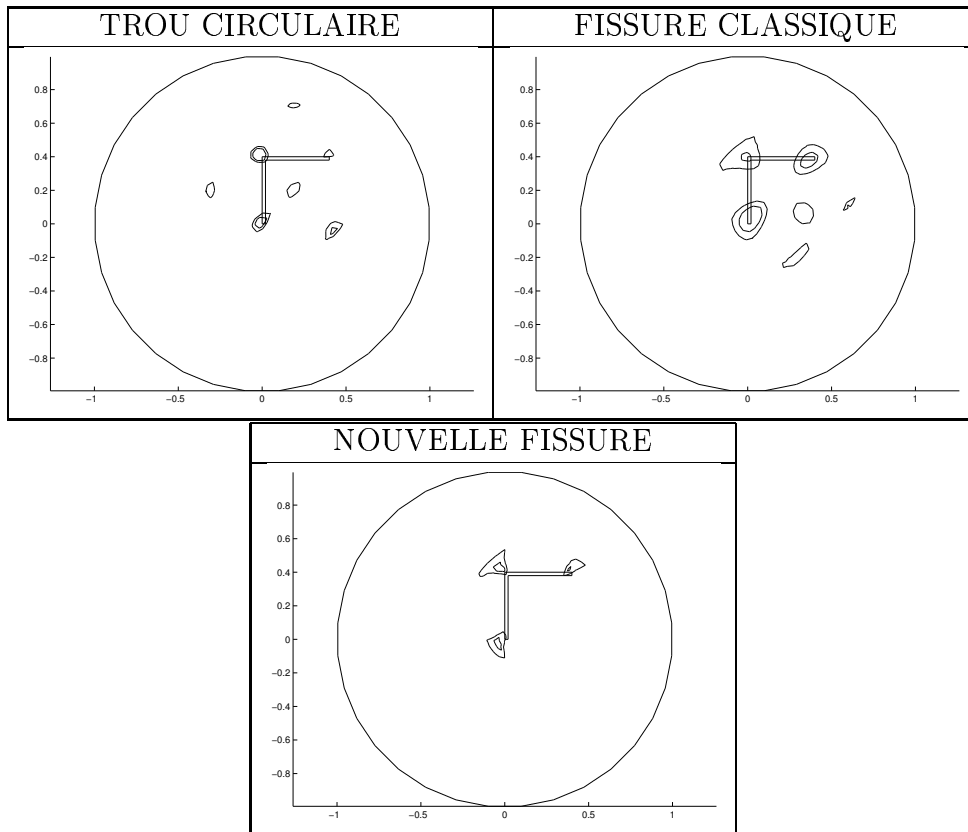


FIG. 8.6 – Superposition de l'objet recherché et de deux lignes de niveau du gradient topologique ($k = 10$)

8.3.4 Inversion de forme pour un objet diélectrique

Nous reprenons le même exemple que précédemment, mais avec un objet recherché diélectrique de caractéristiques connues. L'asymptotique topologique correspondante a été établie au chapitre 5. Nous avons obtenu en 2D pour l'insertion d'une inhomogénéité circulaire et une fonction coût qui ne dépend pas de la solution au voisinage de l'inclusion (Corollaire 5.15) le gradient topologique

$$g(x) = 2\pi\rho^2\Re \left[\frac{2\alpha_0(\alpha_0 - \alpha_1)}{\alpha_0 + \alpha_1} \nabla u_0(x) \cdot \overline{\nabla v_0(x)} - (\beta_1 - \beta_0)u_0(x) \cdot \overline{v_0(x)} \right].$$

Nous renvoyons à la section 5.3 pour la définition des coefficients α_0 , α_1 , β_0 et β_1 . Pour un problème d'électromagnétisme 2D en plan E , nous prenons $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = k^2$ et les valeurs de α_1 et α_0 indiquées dans le tableau 8.2. Les constantes ν et μ_r désignent respectivement l'indice de réfraction et le perméabilité relative de l'inhomogénéité. Le

	α_1	β_1
Plan H	$\frac{1}{\nu^2}$	$\frac{k^2}{\mu_r}$
Plan E	$\frac{\mu_r}{\nu^2}$	$\mu_r k^2$

TAB. 8.2 – Coefficients en électromagnétisme

tableau 8.7 représente les résultats obtenus pour trois configurations.

8.4 Algorithmes itératifs

8.4.1 Méthodes de type Krylov : cadre abstrait

Nous montrons d'abord comment adapter différentes méthodes d'optimisation à un problème abstrait de référence. Ensuite, nous appliquons ces résultats à l'optimisation de forme.

Contexte pour un champ réel

Le problème consiste à minimiser une fonction coût du type

$$j(\alpha) = J(u(\alpha)).$$

Les hypothèses sont les suivantes.

1. La variable α appartient à $\mathcal{H} = \mathbb{R}^P$.
2. Pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$, $u(\alpha) \in \mathcal{V} = \mathbb{R}^N$ et est solution du problème matriciel

$$A(\alpha)u(\alpha) = L(\alpha). \quad (8.10)$$

Nous supposons que $A(\alpha)$ est inversible. Les produits scalaires sur \mathcal{H} et \mathcal{V} sont notés par (\cdot, \cdot) . Ce ne sont pas nécessairement les produits scalaires canoniques.

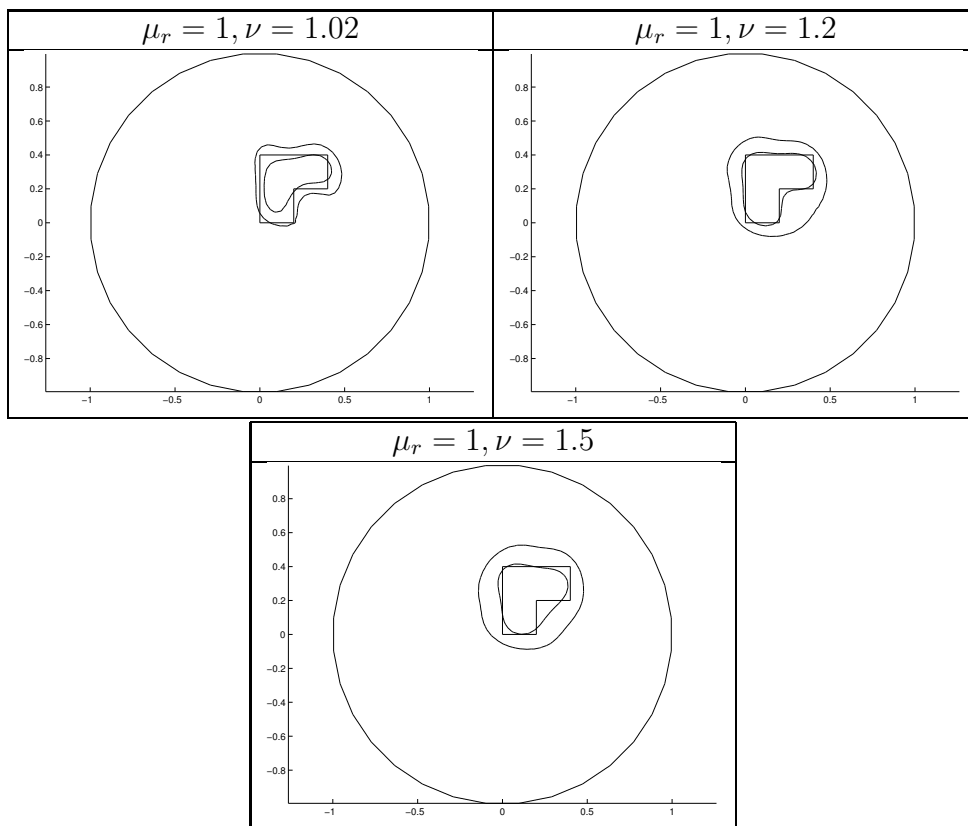


FIG. 8.7 – Superposition de l'objet recherché et de deux lignes de niveau du gradient topologique (diélectrique, $k = 10$)

3. Les applications $\alpha \mapsto A(\alpha)$ et $\alpha \mapsto L(\alpha)$ sont de classe \mathcal{C}^1 .

4. L'application $u \mapsto J(u)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{V} .

Supposons que nous ayons déjà effectué n itérations : nous avons obtenu une suite $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Nous voulons choisir la meilleure direction de descente ainsi que le meilleur pas permettant de déterminer α_{n+1} . Comme nous l'avons annoncé au début du chapitre, nous allons présenter

- des méthodes directes utilisant à l'itération n une direction de descente obtenue par combinaison linéaire des ∇j calculés aux itérations précédentes,
- des méthodes indirectes cherchant à minimiser $J(u)$ sous la contrainte $\exists \alpha \in \mathcal{H}$ tel que $u = u(\alpha)$, cette contrainte étant prise en compte par une technique de projection.

Précisons encore les notations. Pour tous $\alpha \in \mathcal{H}$ et $u, v \in \mathcal{V}$, nous définissons le lagrangien

$$\mathcal{L}(\alpha, u, v) = v^T A(\alpha)u - v^T L(\alpha) + J(u).$$

L'état adjoint $v(\alpha)$ est défini par

$$A(\alpha)^T v(\alpha) = -DJ(u(\alpha))^T. \quad (8.11)$$

Les deux lemmes suivants sont classiques.

Lemme 8.4 *L'application*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{V} \\ \alpha &\mapsto u(\alpha) \end{aligned}$$

est de classe \mathcal{C}^1 .

Lemme 8.5

$$Dj(\alpha) = D_\alpha \mathcal{L}(\alpha, u(\alpha), v(\alpha)).$$

Nous rappelons que le gradient d'une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par

$$(\nabla f(\alpha), \beta) = Df(\alpha)\beta \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{H}$$

et que le gradient d'une fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}$ est défini par

$$(\beta, \nabla f(\alpha)u) = (Df(\alpha)\beta, u) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{H}, \forall u \in \mathcal{V}.$$

Ainsi, nous noterons indifféremment $\nabla f(\alpha)$ ou $Df(\alpha)^*$. Nous supposons que, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$, la fonction $D_\alpha \mathcal{L}(\alpha, \cdot, \cdot)$ est connue explicitement.

Méthode directe

Il s'agit de rechercher directement à minimiser $j(\alpha)$ par une méthode de descente. Ces méthodes consistent à poser

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + t_n d_n$$

où $t_n \in \mathbb{R}^+$ est le pas et $d_n \in \mathcal{H}$ est la direction de descente. Nous supposons que d_n est de la forme

$$d_n = \sum_{k=0}^n \beta_k^n \nabla j(\alpha_k).$$

Alors, d'après le lemme 8.5,

$$d_n = \sum_{k=0}^n \beta_k^n \nabla_{\alpha} \mathcal{L}(\alpha_k, u(\alpha_k), v(\alpha_k)).$$

Méthode indirecte

L'idée est de chercher $u \in \mathcal{V}$ minimisant $J(u)$ sous la contrainte

$$\exists \alpha \in \mathcal{H} \text{ tel que } A(\alpha)u = L(\alpha),$$

c'est-à-dire $u \in u(\mathcal{H})$. Si Δ_n est une direction de descente sur \mathcal{V} , la méthode de projection consiste à poser

$$u_{n+1} = u_n + t_n \underbrace{P_{T(u(\mathcal{H}), u_n)}(\Delta_n)}_{\delta_n} \quad (8.12)$$

où $P_{T(u(\mathcal{H}), u_n)}$ est le projecteur orthogonal sur le plan tangent à $u(\mathcal{H})$ en u_n .

Dans les méthodes de Krylov, Δ_n est de la forme

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^n \beta_k^n \nabla J(u_k).$$

Nous désirons savoir comment réactualiser α pour que $u(\alpha)$ varie selon la relation (8.12), de manière approchée seulement à moins que la variété $u(\mathcal{H})$ soit localement affine au voisinage de u_n . La réponse sera donnée dans les propositions 8.8 et 8.10. Pour les démontrer, nous avons besoin de deux lemmes préliminaires.

Lemme 8.6 *Pour tous $\alpha, h \in \mathcal{H}$ et $v \in \mathcal{V}$,*

$$D_{\alpha} \mathcal{L}(\alpha, u(\alpha), v)h = -v^T A(\alpha) Du(\alpha)h.$$

Preuve. Nous dérivons (8.10) par rapport à α :

$$D_{\alpha} A(\alpha)hu(\alpha) + A(\alpha)Du(\alpha)h = D_{\alpha} L(\alpha)h.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} D_{\alpha} \mathcal{L}(\alpha, u(\alpha), v)h &= v^T D_{\alpha} A(\alpha)hu(\alpha) - v^T D_{\alpha} L(\alpha)h \\ &= -v^T A(\alpha)Du(\alpha)h. \end{aligned}$$

□

Pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$, nous définissons la matrice $B(\alpha)$ par ses composantes

$$(B(\alpha))_{ij} = -D_{\alpha} \mathcal{L}(\alpha, u(\alpha), e_i) f_j, \quad (8.13)$$

où $(e_i)_{i=1}^N$ et $(f_j)_{j=1}^P$ sont les bases canoniques respectives de \mathbb{R}^N et \mathbb{R}^P .

Lemme 8.7 Pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$,

$$Du(\alpha) = A(\alpha)^{-1}B(\alpha).$$

Preuve. D'après le lemme 8.6,

$$(B(\alpha))_{ij} = e_i^T A(\alpha) Du(\alpha) f_j.$$

D'où

$$B(\alpha) = A(\alpha) Du(\alpha).$$

□

Deux situations peuvent se présenter. Nous notons pour simplifier

$$A_n = A(\alpha_n), \quad B_n = B(\alpha_n), \quad DJ_n = DJ(u_n)$$

1. CAS OÙ $N \leq P$:

Dans ce cas, on a en principe $T(u(\mathcal{H}), u_n) = \mathcal{V}$ et il n'y a pas besoin de projection. La direction de descente sur \mathcal{H} est donnée par la proposition suivante.

Proposition 8.8 Soit $\Delta_n \in \mathcal{V}$. On suppose qu'il existe $d_n \in \mathcal{H}$ vérifiant

$$B_n d_n = A_n \Delta_n.$$

Si l'on pose

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + t_n d_n,$$

alors

$$u(\alpha_{n+1}) = u(\alpha_n) + t_n \Delta_n + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|).$$

Preuve. Nous avons, en utilisant le lemme 8.7,

$$\begin{aligned} u(\alpha_{n+1}) - u(\alpha_n) &= Du(\alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|) \\ &= A_n^{-1} B_n t_n d_n + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|) \\ &= t_n A_n^{-1} A_n \Delta_n + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|) \\ &= t_n \Delta_n + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|). \end{aligned}$$

□

Remarque 8.1 Lorsque $N < P$, le système est sous dimensionné et d_n n'est en général pas déterminé de manière unique. C'est normal, car dans ce cas il existe plusieurs variations de α donnant lieu à la même variation de $u(\alpha)$.

2. CAS OÙ $P \leq N$:

Nous allons reprendre la méthode de projection. Nous avons

$$\begin{aligned} T(u(\mathcal{H}), u_n) &= \text{Im}(Du(\alpha_n)) \\ &= \text{Im}(A(\alpha)^{-1}B(\alpha)). \end{aligned}$$

Les bases canoniques $(e_i)_{i=1}^N$ et $(f_j)_{j=1}^P$ de \mathbb{R}^N et \mathbb{R}^P ne sont en générales pas orthonormées pour les produits scalaires qui nous intéressent. Nous notons respectivement E et F les matrices des produits scalaires de \mathcal{V} et \mathcal{H} dans ces bases. Par exemple, pour tous $u, v \in \mathcal{V}$, nous avons

$$(u, v) = u^T E v.$$

Le lemme suivant est standard.

Lemme 8.9 *Considérons une application linéaire de \mathcal{H} dans \mathcal{V} caractérisée par sa matrice M dans les bases canoniques. Soit le sous-espace vectoriel $V = \text{Im}(M)$. On suppose que $M^T E M$ est inversible. Alors pour tout $u \in \mathcal{V}$,*

$$P_V u = M(M^T E M)^{-1} M^T E u.$$

La direction de descente sur α est fournie par la proposition suivante

Proposition 8.10 *Soit $\Delta_n \in \mathcal{V}$. On suppose que la matrice $B_n^T A_n^{-T} E A_n^{-1} B_n$ est inversible. On choisit d_n solution de*

$$B_n^T A_n^{-T} E A_n^{-1} B_n d_n = B_n^T A_n^{-T} E \Delta_n$$

et on pose

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + t_n d_n.$$

Alors

$$u(\alpha_{n+1}) = u(\alpha_n) + t_n P_{T(u(\mathcal{H}), u_n)}(\Delta_n) + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|).$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} & u(\alpha_{n+1}) - u(\alpha_n) \\ &= Du(\alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|) \\ &= A_n^{-1} B_n t_n d_n + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|) \\ &= t_n P_{T(u(\mathcal{H}), u_n)}(\Delta_n) + o(\|\alpha_{n+1} - \alpha_n\|), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du lemme 8.9 avec $M = Du(\alpha_n) = A_n^{-1} B_n$. \square

Remarque 8.2 *Lorsque $N = P$ et que la matrice $B_n^T A_n^{-T} E A_n^{-1} B_n$ est inversible, les directions de descentes d_n données par les propositions 8.8 et 8.10 coïncident.*

Exemples

Nous rappelons trois méthodes d'optimisation couramment employées. Les deux dernières sont une généralisation du gradient conjugué aux fonctions non quadratiques (se reporter par exemple à [2] pour plus de détails). Néanmoins, lorsque J est quadratique, on peut penser qu'elles marcheront mieux de manière indirecte car j ne sera généralement pas quadratique. Cependant, leur comportement par rapport à une contrainte est inconnu. Notamment, rien ne prouve que la projection d'une direction de descente reste une direction de descente.

1. MÉTHODE DE LA PLUS FORTE PENTE : Dans le cas d'une optimisation directe, la méthode consiste à choisir le pas t_n qui minimise $j(\alpha_n + t_n d_n)$ et la direction de descente définie par :

$$d_n = -\nabla j(\alpha_n).$$

C'est la méthode la plus classique.

2. MÉTHODE DE FLETCHER-REEVES : La direction de descente fait intervenir les gradients de la fonction coût aux itérations précédentes :

$$\begin{cases} d_0 = -\nabla j(\alpha_0), \\ d_{n+1} = -\nabla j(\alpha_{n+1}) + \frac{\|\nabla j(\alpha_{n+1})\|^2}{\|\nabla j(\alpha_n)\|^2} d_n. \end{cases}$$

3. MÉTHODE DE POLAK-RIBIÈRE : Le principe est le même avec

$$d_{n+1} = -\nabla j(\alpha_{n+1}) + \frac{(\nabla j(\alpha_{n+1}), \nabla j(\alpha_{n+1}) - \nabla j(\alpha_n))}{\|\nabla j(\alpha_n)\|^2} d_n.$$

Dans notre cas, nous avons

$$\nabla j(\alpha) = F^{-1} D j(\alpha)^T$$

et

$$\nabla J(u) = E^{-1} D J(u)^T.$$

Le tableau 8.3 montre comment appliquer ces trois méthodes au problème qui nous intéresse. Afin d'alléger l'écriture, nous avons noté

$$G_n = D_\alpha \mathcal{L}(\alpha_n, u_n, v_n)^T.$$

Cas d'un champ complexe

Nous nous intéressons maintenant au cas où le champ $u(\alpha)$ est complexe. Les hypothèses sont modifiées de la façon suivante.

1. Les espaces de travail sont $\mathcal{H} = \mathbb{R}^P$ et $\mathcal{V} = \mathbb{C}^N$.
2. J est "différentiable" dans le sens suivant :

$$J(u+h) - J(u) = \Re(\bar{h}^T \Lambda(u)) + o(\|h\|)$$

où $\Lambda(u) \in \mathcal{V}$.

Le lagrangien est désormais défini par

$$\mathcal{L}(\alpha, u, v) = J(u) + \bar{v}^T A(\alpha)u - \bar{v}^T L(\alpha).$$

La matrice $B(\alpha)$ est toujours définie par (8.13). Nous déduisons les résultats du cas réel en identifiant \mathbb{C}^N à \mathbb{R}^{2N} . Ils sont rassemblés dans le tableau 8.4, toujours avec les mêmes notations et $\Lambda_n = \Lambda(u_n)$.

METHODE DIRECTE		
Etat adjoint		$A_n^T v_n = -DJ_n^T$
Direction de descente sur \mathcal{H}	Plus forte pente	$d_n = -F^{-1}G_n$
	Fletcher	$d_{n+1} = -F^{-1}G_{n+1}$
	Reeves	$+ \frac{G_{n+1}^T F^{-1} G_{n+1}}{G_n^T F^{-1} G_n} d_n$
	Polak Ribière	$d_{n+1} = -F^{-1}G_{n+1}$ $+ \frac{G_{n+1}^T F^{-1} (G_{n+1} - G_n)}{G_n^T F^{-1} G_n} d_n$
METHODE INDIRECTE		
Direction de descente sur \mathcal{V}	Plus forte pente	$\Delta_n = -E^{-1}DJ(u_n)^T$
	Fletcher	$\Delta_{n+1} = -E^{-1}DJ_{n+1}^T$
	Reeves	$+ \frac{DJ_{n+1} E^{-1} DJ_{n+1}^T}{DJ_n E^{-1} DJ_n^T} \Delta_n$
	Polak Ribière	$\Delta_{n+1} = -E^{-1}DJ_{n+1}^T$ $+ \frac{DJ_{n+1} E^{-1} (DJ_{n+1}^T - DJ_n^T)}{DJ_n E^{-1} DJ_n^T} \Delta_n$
Direction de descente sur \mathcal{H}	$N \leq P$	$B_n d_n = A_n \Delta_n$
	$N \geq P$	$B_n^T (A_n E^{-1} A_n^T)^{-1} B_n d_n$ $= B_n^T A_n^{-T} E \Delta_n$

TAB. 8.3 – Direction de descente, champ réel

METHODE DIRECTE		
Etat adjoint		$\overline{A_n}^T v_n = -\Lambda_n$
Direction de descente sur \mathcal{H}	Plus forte Pente	$d_n = -F^{-1}\Re G_n$
	Fletcher	$d_{n+1} = -F^{-1}G_{n+1}$
	Reeves	$+ \frac{\Re G_{n+1}^T F^{-1} \Re G_{n+1}}{\Re G_n^T F^{-1} \Re G_n} d_n$
	Polak Rivière	$d_{n+1} = -F^{-1}\Re G_{n+1}$ $+ \frac{\Re G_{n+1}^T F^{-1} \Re(G_{n+1} - G_n)}{\Re G_n F^{-1} \Re G_n} d_n$
METHODE INDIRECTE		
Direction de descente sur \mathcal{V}	Plus forte pente	$\Delta_n = -E^{-1}\Lambda(u_n)$
	Fletcher	$\Delta_{n+1} = -E^{-1}\Lambda_{n+1}$
	Reeves	$+ \frac{\overline{\Lambda_{n+1}}^T E^{-1} \Lambda_{n+1}}{\overline{\Lambda_n}^T E^{-1} \Lambda_n} \Delta_n$
	Polak Rivière	$\Delta_{n+1} = -E^{-1}\Lambda_{n+1}$ $+ \frac{\Re[\overline{\Lambda_{n+1}}^T E^{-1}(\Lambda_{n+1} - \Lambda_n)]}{\overline{\Lambda_n}^T E^{-1} \Lambda_n} \Delta_n$
Direction de descente sur \mathcal{H}	$2N \leq P$	$B_n d_n = A_n \Delta_n$
	$2N \geq P$	$\Re \left[\overline{B_n}^T (A_n E^{-1} \overline{A_n}^T)^{-1} B_n \right] d_n$ $= \Re \left[\overline{B_n}^T \overline{A_n}^{-T} E \Delta_n \right]$

TAB. 8.4 – Direction de descente, champ complexe

8.4.2 Application à l'optimisation de forme

Nous montrons une manière d'appliquer les méthodes précédentes à un problème d'optimisation topologique que nous souhaitons résoudre numériquement sur un maillage fixe.

Idée générale

Le domaine initial Ω est maillé avec P éléments et N noeuds. La variable de contrôle est $\alpha \in \{0, 1\}^P = \tilde{\mathcal{H}}$, la fonction caractéristique du domaine. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $u(\alpha) \in \mathcal{V} = \mathbb{C}^N$ est calculé par éléments finis. Nous posons $\mathcal{H} = \mathbb{R}^P$. La fonction j étant supposée différentiable de \mathcal{H} dans \mathbb{R} , les méthodes précédentes fournissent une direction de descente $d_n \in \mathcal{H}$. Nous choisissons alors

$$\alpha_{n+1} = \Pi(\alpha_n + t_n d_n) \quad (8.14)$$

où Π est un opérateur de projection (ou de pénalisation) qui à tout élément de \mathcal{H} associe un élément de $\tilde{\mathcal{H}}$. En pratique, nous prenons chaque composante de $\Pi(\alpha)$ égale à 1 là où la composante correspondante de α est supérieure à un seuil, les autres composantes étant nulles.

Choix des produits scalaires

Le produit scalaire sur \mathcal{H} est donné par des considérations liées au maillage. Dans la suite, nous prenons $F = I$. En revanche, le produit scalaire sur \mathcal{V} peut être choisi parmi plusieurs possibilités. Nous remarquons que ce choix, qui équivaut à la détermination de la matrice E , n'a d'influence que sur la méthode indirecte. Nous nous plaçons dans le cas où $N < P < 2N$ (cas d'éléments triangulaires en 2D). Nous rappelons que le champ est complexe. L'idée a priori naturelle consiste à prendre sur \mathcal{V} la forme discrète du produit scalaire de $H^1(\Omega)$. Mais cela donne des résultats numériques décevants.

Une autre option est de faire en sorte que, dans la mesure du possible, la méthode indirecte de la plus forte pente coïncide avec son analogue direct. Ce choix, parfaitement arbitraire, est motivé par le fait que, localement, c'est la méthode directe de la plus forte pente qui est sensée fournir la meilleure direction de descente. Ce même produit scalaire sera ensuite utilisé pour les autres méthodes. Les directions de descente des méthodes directe et indirecte de la plus forte pente sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} d_n^d &= -\Re D_\alpha \mathcal{L}(\alpha_n, u_n, v_n)^T \\ &= \Re [B_n^T \bar{v}_n] \\ &= -\Re [B_n^T A_n^{-T} \bar{\Lambda}_n] \\ &= -\Re [\bar{B}_n^{-T} \bar{A}_n^{-T} \Lambda_n], \\ \Re \left[\bar{B}_n^{-T} (A_n E^{-1} \bar{A}_n^{-T})^{-1} B_n \right] d_n^i &= -\Re \left[\bar{B}_n^{-T} \bar{A}_n^{-T} \Lambda_n \right]. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Malheureusement, il n'existe en général pas de matrice E hermitienne définie positive qui assure que $d_n^i = d_n^d$. Néanmoins, on suppose que la matrice $B_n \bar{B}_n^{-T}$ est inversible et on pose

$$E^{-1} = A_n^{-1} B_n \bar{B}_n^{-T} \bar{A}_n^{-T}. \quad (8.16)$$

L'équation (8.15) s'écrit alors

$$\Re(M)d_n^i = -\Re[\overline{B_n^T A_n^{-T}} \Lambda_n], \quad (8.17)$$

où $M = \overline{B_n^T} (B_n B_n^T)^{-1} B_n$. Il s'agit de la matrice du projecteur orthogonal sur $(\ker B_n)^\perp$. Lorsque $N = P$, M est bien l'identité, ce qui n'est certainement pas le cas lorsque $N > P$. Cependant, pour éviter l'assemblage de M et une résolution supplémentaire de système linéaire, nous remplacerons dans tous les cas $\Re M$ par l'identité dans (8.17).

Nous obtenons ainsi un produit scalaire qui varie d'une itération à la suivante : E sera désormais noté E_n . Les formules d'optimisation indirecte deviennent alors relativement simples. Afin de faciliter la comparaison avec le méthode directe, nous avons fait intervenir dans le tableau 8.5 explicitement l'état adjoint. Nous avons également posé $\Delta'_n = E_n \Delta_n$. Pour obtenir, pour les méthodes de Fletcher-Reeves et de Polak-Ribière, la relation de récurrence sur Δ'_n , nous utilisons la remarque suivante :

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda(u_k)^T} E_n^{-1} \Lambda(u_p) &= \overline{\Lambda(u_k)^T} A_n^{-1} B_n \overline{B_n^T} \overline{A_n^{-T}} \Lambda(u_p) \\ &= \overline{[B_n^T A_n^{-T} \Lambda(u_k)]^T} \overline{B_n^T} \overline{A_n^{-T}} \Lambda(u_p) \\ &= \overline{[B_n^T v_n^k]^T} \overline{B_n^T} v_n^p \\ &= \overline{D_\alpha \mathcal{L}(\alpha_n, u_n, v_n^k)^T} D_\alpha \mathcal{L}(\alpha_n, u_n, v_n^p) \end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture, nous avons noté ici et dans le tableau 8.5

$$v_n^k = \overline{A_n^{-T}} \Lambda(u_k),$$

$$G_n = D_\alpha \mathcal{L}(\alpha_n, u_n, v_n)^T \quad \text{et} \quad G_n^k = D_\alpha \mathcal{L}(\alpha_n, u_n, v_n^k)^T.$$

8.4.3 Optimisation du guide d'onde en T

Nous reprenons l'exemple du guide d'onde du paragraphe 8.3.2. Nous testons successivement les différentes formules du tableau 8.5. Nous prenons toujours $k = 10$. La fonction coût discrète à maximiser s'écrit sous la forme

$$J(u) = |S^T u|^2$$

où S est un vecteur de \mathbb{C}^N . Ainsi, nous posons

$$\Lambda(u) = 2(S^T u)S.$$

La géométrie initiale a été un peu modifiée par rapport au paragraphe 8.3.2. Sur la figure 8.8 sont représentés en gras les bords métalliques, en trait fin les frontières où l'on impose une condition d'absorption et en pointillés l'entrée et la sortie. Le maillage est réalisé avec $N = 5643$ noeuds et $P = 10864$ éléments. La fonction $D_\alpha(\alpha, u, v)^T$ considérée est le gradient topologique pour des trous circulaires.

METHODE DIRECTE		
Etat adjoint		$\overline{A}_n^T v_n = -\Lambda_n$
Direction de descente sur \mathcal{H}	Plus forte pente	$d_n = -\Re G_n$
	Fletcher	$d_{n+1} = -\Re G_{n+1}$
	Reeves	$\Re G_{n+1}^T \Re G_{n+1} d_n$ $+ \frac{\Re G_{n+1}^T \Re G_{n+1}}{\Re G_n^T \Re G_n} d_n$
	Polak Ribièrè	$d_{n+1} = -\Re G_{n+1}$ $+ \frac{\Re G_{n+1}^T \Re(G_{n+1} - G_n)}{\Re G_n^T \Re G_n} d_n$
METHODE INDIRECTE		
Etats adjoints auxiliaires		$\overline{A}_n^T v_n^k = \Lambda(u_k)$
Direction de descente sur \mathcal{V}	Plus forte pente	$\Delta'_n = -\Lambda(u_n)$
	Fletcher	$\Delta'_{n+1} = -\Lambda_{n+1}$
	Reeves	$\frac{G_{n+1}^{m+1 T} G_{n+1}^{m+1}}{G_{n+1}^n G_{n+1}^n} \Delta'_n$ $+ \frac{G_{n+1}^{m+1 T} G_{n+1}^{m+1}}{G_{n+1}^n G_{n+1}^n} \Delta'_n$
	Polak Ribièrè	$\Delta'_{n+1} = -\Lambda_{n+1}$ $+ \frac{\Re[G_{n+1}^{m+1 T} (G_{n+1}^{m+1} - G_{n+1}^n)]}{G_{n+1}^n G_{n+1}^n} \Delta'_n$
Etat adjoint		$\overline{A}_n^T v_n = \Delta'_n$
Direction de descente sur \mathcal{H}		$d_n = -\Re G_n$
PROJECTION		
Direction de descente sur $\tilde{\mathcal{H}}$		$\alpha_{n+1} = \Pi(\alpha_n + t_n d_n)$

TAB. 8.5 – Direction de descente pour un champ complexe avec un produit scalaire particulier

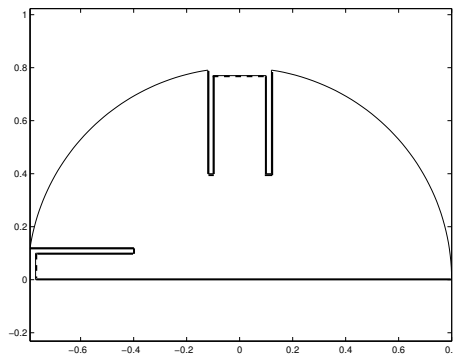


FIG. 8.8 – Géométrie initiale

Pas unitaire

Dans un premier temps, nous décidons de n'ajouter qu'une seule maille de matière à chaque itération.

1. **Méthode directe.** Les résultats correspondants aux méthodes de la plus forte pente, de Fletcher-Reeves et de Polak-Ribière sont représentés sur la figure 8.9. Les pertes minimales sont indiquées dans le tableau 8.6.

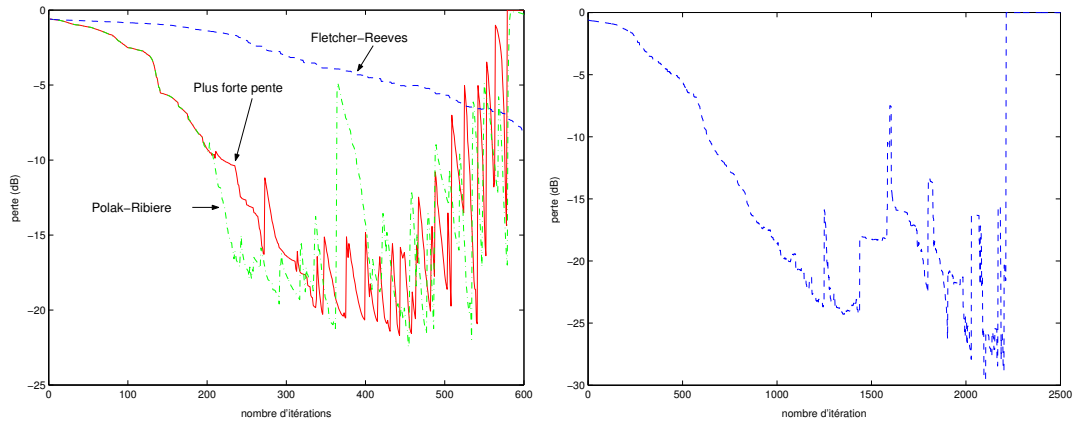


FIG. 8.9 – Méthode directe, pas unitaire (à droite, Fletcher-Reeves uniquement)

2. **Méthode indirecte.** Le fait que le vecteur $\Lambda(u)$ garde toujours la même direction permet de simplifier le calcul de Δ'_n pour les méthodes de Fletcher-Reeves et Polak-Ribière. En effet,

$$\begin{aligned} v_n^k &= \overline{A_n}^{-T} \Lambda(u_k) \\ &= \overline{A_n}^{-T} 2(S^T u_k) S \\ &= 2(S^T u_k) \overline{A_n}^{-T} S. \end{aligned}$$

La sesquilinearité du lagrangien par rapport à u et v permet d'obtenir les formules suivantes.

– Fletcher-Reeves :

$$\Delta'_{n+1} = -\Lambda_{n+1} + \frac{|S^T u_{n+1}|^2}{|S^T u_n|^2} \Delta'_n.$$

– Polak-Ribiere :

$$\Delta'_{n+1} = -\Lambda_{n+1} + \frac{\Re[(S^T u_{n+1})(\overline{S^T u_{n+1} - S^T u_n})]}{|S^T u_n|^2} \Delta'_n.$$

Les résultats sont représentés sur la figure 8.10 et dans le tableau 8.6.

3. **Conclusion.** La méthode de Fletcher-Reeves donne les meilleurs résultats. La méthode de Polak-Ribière n'a pas grand intérêt car elle a été conçue pour un pas optimal à chaque itération, ce qui est loin d'être notre cas. Pour un pas petit (une maille par itération), elle est toujours très proche de la méthode de la plus forte pente.

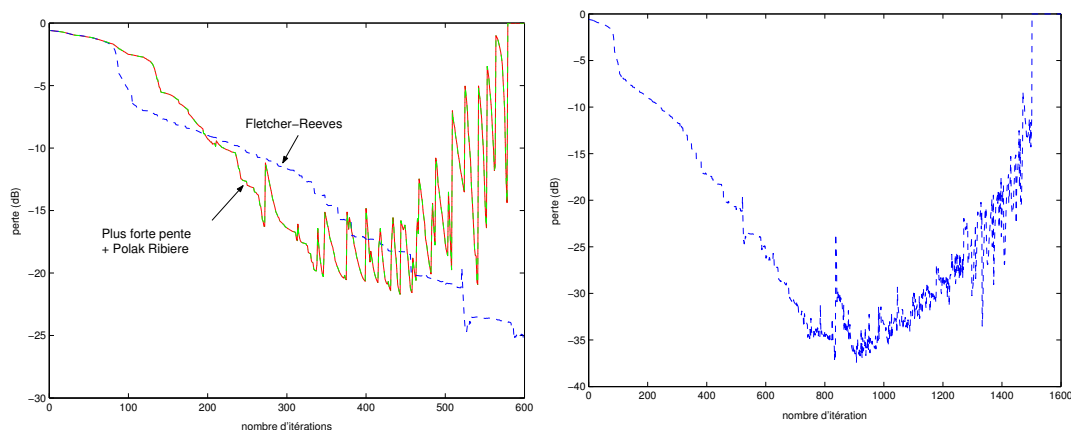


FIG. 8.10 – Méthode indirecte, pas unitaire (à droite, Fletcher-Reeves uniquement)

Méthode	perte mini (dB)	itération
Plus forte pente	-21.7	443
Fletcher-Reeves direct	-29.5	2103
Polak-Ribière direct	-22.5	455
Fletcher-Reeves indirect	-37.4	907
Polak-Ribière indirect	-21.7	443

TAB. 8.6 – Valeurs minimales de la fonction coût (pas unitaire)

Pas optimal

Afin de mieux se conformer aux algorithmes itératifs d'optimisation, nous avons mis en oeuvre une recherche linéaire de pas : à chaque itération, nous essayons d'approcher le pas optimal dans la direction d_n . L'évaluation de la fonction coût étant assez lourde, nous ne testons que des valeurs situées sur une échelle à progression géométrique, au risque d'être assez éloigné du pas optimal. L'algorithme est du coup plus rapide, surtout au début de l'optimisation où nous avons de très grands pas (plusieurs centaines d'éléments). Nous obtenons de plus des pertes améliorées (voir figure 8.11 et tableau 8.7). La géométrie obtenue à l'itération 267 de la méthode de Fletcher-Reeves est représentée sur la figure 8.12.

Méthode	perte mini (dB)	itération
Plus forte pente	-26.1	82
Fletcher-Reeves direct	-34.1	302
Polak-Ribière direct	-29.3	99
Fletcher-Reeves indirect	-45.4	267
Polak-Ribière indirect	-22.6	59

TAB. 8.7 – Valeurs minimales de la fonction coût (pas variable)

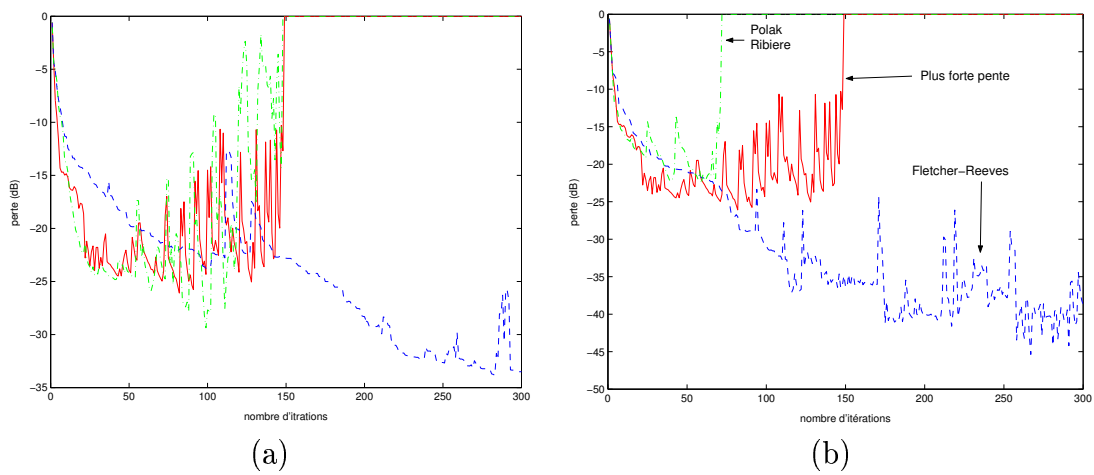


FIG. 8.11 – Pas variable : Méthode directe (a), Méthode indirecte (b)

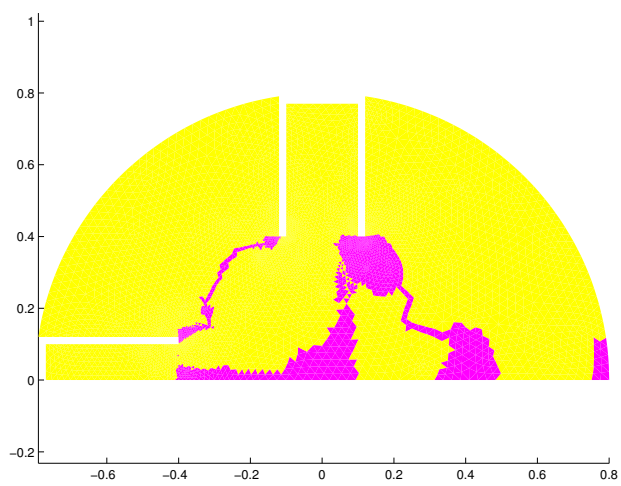


FIG. 8.12 – Géométrie optimale

8.4.4 Inversion de forme

Nous revenons au problème d'inversion de forme du paragraphe 8.3.3 avec une approche itérative. En appelant N_s le nombre de sources, nous rappelons que la fonction coût à minimiser est :

$$J(u_1, \dots, u_{N_s}) = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} |S_{ij}(u_i) - S_{ij}^m|^2.$$

Nous devons donc généraliser les méthodes de la sous-section 8.4.1 au cas où il y a plusieurs états directs. C'est l'objectif du paragraphe qui suit.

Méthodes d'optimisation avec plusieurs états directs

Nous supposons que la fonction coût est de la forme

$$j(\alpha) = J(u_1(\alpha), \dots, u_K(\alpha))$$

où

1. $\alpha \in \mathcal{H} = \mathbb{R}^P$,
2. $J(u_1, \dots, u_K) = \sum_{k=1}^K J_k(u_k)$,
3. pour tous $\alpha \in \mathcal{H}$ et $k = 1..K$, le champ $u_k(\alpha) \in \mathcal{V}_k = \mathbb{C}^{N_k}$ est solution de

$$A_k(\alpha)u_k(\alpha) = L_k(\alpha),$$

les matrices $A_k(\alpha)$ étant inversibles,

4. les fonctions J_k sont différentiables dans le sens

$$J_k(u+h) - J_k(u) = \Re(\bar{h}^T \Lambda_k(u)) + o(\|h\|)$$

avec $\Lambda_k(u) \in \mathcal{V}_k$.

Nous déduisons les résultats du cas à un seul état direct en identifiant $\mathbb{C}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{C}^{N_K}$ à $\mathbb{C}^{N_1+\dots+N_K}$. Nous avons K lagrangiens

$$\mathcal{L}_k(\alpha, u_k, v_k) = J_k(u_k) + u_k^T A_k(\alpha) \bar{v}_k - L_k(\alpha)^T \bar{v}_k.$$

Le tableau 8.8 récapitule les différents résultats obtenus en raisonnant par blocs de matrices. Nous supposons que $2N_k \geq P$ pour tout k . Pour des états adjoints v_k^n et des états adjoints auxiliaires $v_k^{n,p}$, nous notons

$$G_k^n = D_\alpha \mathcal{L}_k(\alpha, u, v)(\alpha_n, u_k^n, v_k^n)^T \quad \text{et} \quad G_k^{n,p} = D_\alpha \mathcal{L}_k(\alpha_n, u_k^n, v_k^{n,p})^T.$$

METHODE DIRECTE		
Etats adjoints		$\overline{A_k(\alpha_n)}^T v_k^n = -\Lambda_k(u_k^n)$
Direction de descente sur \mathcal{H}	Plus forte pente	$d_n = -\Re \sum_k G_k^n$
	Fletcher	$d_{n+1} = -\Re \sum_k G_k^{n+1}$
	Reeves	$+ \frac{(\Re \sum_k G_k^{n+1T}) (\Re \sum_k G_k^{n+1})}{(\Re \sum_k G_k^{nT}) (\Re \sum_k G_k^n)} d_n$
	Polak	$d_{n+1} = -\Re \sum_k G_k^{n+1}$
	Ribière	$+ \frac{(\Re \sum_k G_k^{n+1T}) (\Re \sum_k (G_k^{n+1} - G_k^n))}{(\Re \sum_k G_k^{nT}) (\Re \sum_k G_k^n)} d_n$
METHODE INDIRECTE		
Etats adjoints auxiliaires		$\overline{A_n}^T v_k^{n,p} = \Lambda_k(u_k^p)$
Direction de descente sur \mathcal{V}	Plus forte pente	$\Delta_k^{n'} = -\Lambda_k(u_k^n)$
	Fletcher	$\Delta_k^{n+1'} = -\Lambda_k(u_k^{n+1})$
	Reeves	$+ \frac{\sum_k \overline{G_k^{n+1,n+1}}^T G_k^{n+1,n+1}}{\sum_k \overline{G_k^{n+1,n}}^T G_k^{n+1,n}} \Delta_n'$
	Polak	$\Delta_k^{n+1'} = -\Lambda_k(u_k^{n+1})$
	Ribière	$+ \frac{\Re \sum_k [\overline{G_k^{n+1,n+1}}^T (G_k^{n+1,n+1} - G_k^{n+1,n})]}{\sum_k \overline{G_k^{n+1,n}}^T G_k^{n+1,n}} \Delta_n'$
Etat adjoint		$\overline{A_n}^T v_k^n = \Delta_k^{n'}$
Direction de descente sur \mathcal{H}		$d_n = -\Re \sum_k G_k^n$
PROJECTION		
Direction de descente sur $\tilde{\mathcal{H}}$		$\alpha_{n+1} = \Pi(\alpha_n + t_n d_n)$

TAB. 8.8 – Direction de descente pour plusieurs champs complexes

Résultats numériques

Dans le problème d'inversion de forme, nous avons $K = N_s^2$. Pour $D_\alpha \mathcal{L}(\alpha, u, v)$, nous utilisons la formule du gradient topologique pour des trous circulaires car les essais de la sous-section 8.3.3 ont révélé que c'était la mieux adaptée étant données la fréquence ($k = 10$) et la forme de l'objet recherché (épais). Comme pour le guide d'onde, les formules d'optimisation indirectes deviennent très simples. L'indice k étant remplacé par le double indice ij , nous obtenons grâce à la sesquilinearité du lagrangien :

– pour Fletcher-Reeves,

$$\Delta_{ij}^{n+1'} = -2S_{ij}^{n+1} + \frac{\sum_{i'=1}^{N_s} \sum_{j'=1}^{N_s} |S_{i'j'}^{n+1}|^2}{\sum_{i'=1}^{N_s} \sum_{j'=1}^{N_s} |S_{i'j'}^n|^2} \Delta_{ij}^{n'}$$

– pour Polak-Ribière,

$$\Delta_{ij}^{n+1'} = -2S_{ij}^{n+1} + \frac{\sum_{i'=1}^{N_s} \sum_{j'=1}^{N_s} \Re[\overline{S_{i'j'}^{n+1}}(S_{i'j'}^{n+1} - S_{i'j'}^n)]}{\sum_{i'=1}^{N_s} \sum_{j'=1}^{N_s} |S_{i'j'}^n|^2} \Delta_{ij}^{n'}$$

Nous avons pris 12 sources et un maillage de 4416 éléments. Les courbes d'optimisation relatives aux méthodes directes et indirectes avec recherche linéaire de pas sont représentées sur la figure 8.13. Les valeurs minimales de la fonction coût obtenues par les différentes méthodes sont reportées dans le tableau 8.9. La géométrie optimale obtenue par la méthode de Polak-Ribière indirecte ainsi que l'objet recherché sont représentés sur la figure 8.14.

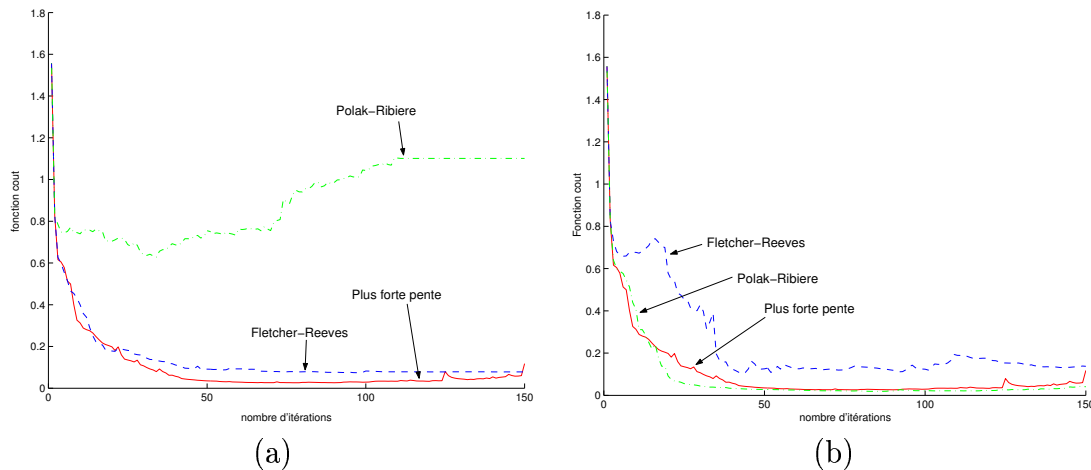


FIG. 8.13 – (a) Méthode directe, (b) Méthode indirecte

8.4.5 Bilan

Pour chaque test effectué, nous avons réussi à améliorer les résultats fournis par la méthode de la plus forte pente. Les meilleures performances ont été réalisées par une

Méthode	J mini	itération
Plus forte pente	0.0260	78
Fletcher-Reeves direct	0.0681	498
Polak-Ribière direct	0.6284	34
Fletcher-Reeves indirect	0.1024	53
Polak-Ribière indirect	0.0143	88

TAB. 8.9 – Valeurs minimales de la fonction coût

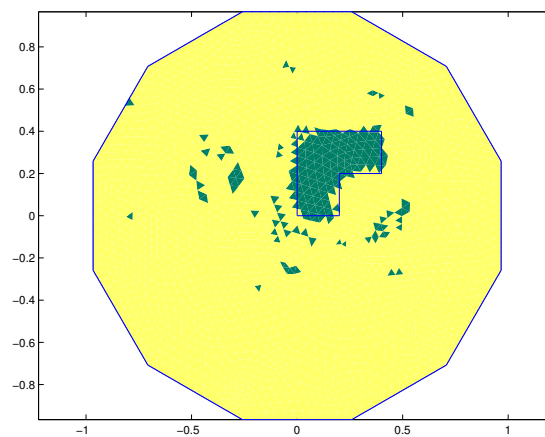


FIG. 8.14 – Géométrie optimale

méthode indirecte. Mais il est bien difficile d'établir un critère permettant de choisir l'algorithme (Fletcher-Reeves ou Polak-Ribière) le mieux adapté, car chacun réagit différemment aux contraintes.

References

- [1] M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover 1964.
- [2] P.G. CIARLET, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

Annexe A

Espaces fonctionnels et équations intégrales pour l'équation de Laplace 2D

A.1 Quelques espaces fonctionnels

A.1.1 Une généralisation de l'inégalité de Poincaré

Le résultat suivant ainsi que sa démonstration généralisent un théorème de [6].

Théorème A.1 *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n = 2, 3$, dont la frontière Γ est de classe C^1 par morceaux. Soit \mathcal{V} un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ et $\|\cdot\|$ une norme sur \mathcal{V} vérifiant*

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad |u|_{1,\Omega} \leq \|u\| \leq C|u|_{1,\Omega}.$$

Alors la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à $|\cdot|_{1,\Omega}$.

Preuve. Le théorème revient à démontrer qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad C_1|u|_{1,\Omega} \leq \|u\|.$$

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe pour tout entier m un vecteur $w_m \in \mathcal{V}$ tel que

$$\|w_m\| < \frac{1}{m}|w_m|_{1,\Omega}.$$

On normalise en posant $v_m = \frac{w_m}{|w_m|_{1,\Omega}}$, ce qui donne

$$|v_m|_{1,\Omega} = 1 \quad \text{et} \quad \|v_m\| < \frac{1}{m}.$$

Comme l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, on peut extraire de v_m une suite v_{m_k} qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers $v \in L^2(\Omega)$. Par ailleurs, nous avons

$$|v_{m_k}|_{1,\Omega} \leq \|v_{m_k}\| < \frac{1}{m_k}.$$

D'où

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla v_{m_k} = 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

On en déduit que la suite $(v_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ qui est complet. Il en résulte que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} v_{m_k} = v \text{ dans } H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad v \in H^1(\Omega).$$

L'espace \mathcal{V} étant fermé, il s'ensuit que $v \in \mathcal{V}$. Or nous avons

$$\|v_{m_k} - v\| \leq C \|v_{m_k} - v\|_{1,\Omega}.$$

Cela implique que v_{m_k} tend vers v au sens de la norme $\|\cdot\|$. Mais, comme $\|v_{m_k}\| < 1/m_k$, v_{m_k} tend vers 0 au sens de cette même norme. Donc $v = 0$, ce qui est impossible puisque $\|v_{m_k}\|_{1,\Omega} = 1$. \square

A.1.2 Espaces fonctionnels quotients

Soit \mathcal{V} un espace de fonctions à valeurs complexes. On suppose que \mathcal{V} est un \mathbb{C} -espace de Hilbert. On définit sur \mathcal{V} la relation d'équivalence suivante

$$uRv \iff u - v = Cte \text{ presque partout.}$$

L'espace quotient est noté \mathcal{V}/\mathbb{C} . On définit

$$\mathbb{C}^\perp = \{u \in \mathcal{V}, (u, 1)_{\mathcal{V}} = 0\}.$$

Soit P le projecteur orthogonal de \mathcal{V} sur \mathbb{C}^\perp . Nous munissons l'espace \mathcal{V}/\mathbb{C} du produit scalaire

$$(U, V)_{\mathcal{V}/\mathbb{C}} = (Pu, Pv)_{\mathcal{V}},$$

où u et v sont des représentants quelconques de U et V . Il en découle la norme :

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{V}/\mathbb{C}} &= \|Pu\|_{\mathcal{V}} \\ &= \inf_{c \in \mathbb{C}} \|u + c\|_{\mathcal{V}} \\ &= \inf_{u \in U} \|u\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

L'espace \mathcal{V}/\mathbb{C} peut ainsi être identifié à \mathbb{C}^\perp , sous Hilbert de \mathcal{V} .

A.1.3 Espaces $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$, $W^1(\Omega')$, $W_0^1(\Omega')$ et $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$

Les définitions et théorèmes de cette section sont une adaptation au cas bidimensionnel de ce qui est présenté en 3D dans [1]. Il y a des changements importants concernant les propriétés des espaces extérieurs.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 contenant l'origine, de frontière Γ et $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Espace $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$

Pour la définition de l'espace $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$, de sa norme et de son produit scalaire, nous renvoyons à la section A.1.2. Nous définissons de plus la semi-norme : pour tout représentant u de U ,

$$|U|_{H^1(\Omega)/\mathbb{C}} = |u|_{H^1(\Omega)}.$$

Nous avons l'inégalité de Poincaré suivante.

Proposition A.2 *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $U \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}$,*

$$\|U\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{C}} \leq c|U|_{H^1(\Omega)/\mathbb{C}}.$$

Preuve. La semi-norme est une norme sur $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$. Or $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$ s'identifie à un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$. Il suffit d'appliquer le théorème A.1. \square

Espace $W^1(\Omega')$

On pose

$$W^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega'), \frac{u}{r \ln r} \in L^2(\Omega') \text{ et } \nabla u \in L^2(\Omega') \right\}.$$

Nous munissons cet espace de la norme et de la semi-norme définies de la façon suivante :

$$\|u\|_{W^1(\Omega')}^2 = \left\| \frac{u}{r \ln r} \right\|_{L^2(\Omega')}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')}^2,$$

$$|u|_{W^1(\Omega')} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega')}.$$

L'espace $W^1(\Omega')$ muni de cette norme est un espace de Hilbert.

Espace $W_0^1(\Omega')$

On définit $W_0^1(\Omega')$ comme étant l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega')$ dans $W^1(\Omega')$. On peut montrer que

$$W_0^1(\Omega') = \{u \in W^1(\Omega'), u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Soient B_a la boule ouverte de centre 0 et de rayon a et $B'_a = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_a}$. Nous avons l'inégalité de Poincaré suivante.

Lemme A.3 *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in W_0^1(B'_a)$,*

$$\|u\|_{W^1(B'_a)} \leq c|u|_{W^1(B'_a)}.$$

Preuve. Soit $u \in W_0^1(B'_a)$. Il faut démontrer que

$$\left\| \frac{u}{r \ln r} \right\|_{L^2(B'_a)} \leq c|u|_{W^1(B'_a)}.$$

Par densité, on suppose que $u \in \mathcal{D}(B'_a)$. En coordonnées polaires, nous avons

$$\left\| \frac{u}{r \ln r} \right\|_{L^2(B'_a)}^2 = \int_0^{2\pi} \int_a^{+\infty} \frac{|u(r, \theta)|^2}{(r \ln r)^2} r dr d\theta.$$

Or pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(]a, +\infty[)$,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{1}{r \ln^2 r} |f(r)|^2 dr &= \int_a^{+\infty} \frac{1}{\ln r} 2\Re(f(r)\overline{f'(r)}) dr \\ &= 2\Re \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r} \ln r} f(r) \sqrt{r} \overline{f'(r)} dr \\ &\leq 2 \left[\int_a^{+\infty} \frac{1}{r \ln^2 r} |f(r)|^2 dr \right]^{1/2} \left[\int_a^{+\infty} r |f'(r)|^2 dr \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{r \ln^2 r} |f(r)|^2 dr \leq 4 \int_a^{+\infty} r |f'(r)|^2 dr.$$

En prenant $f(r) = u(r, \theta)$, nous avons

$$\left\| \frac{u}{r \ln r} \right\|_{L^2(B'_a)}^2 \leq \int_0^{2\pi} 4 \int_a^{+\infty} r \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 dr d\theta \leq 4 \|u\|_{W^1(B'_a)}^2.$$

□

Nous allons maintenant donner un résultat analogue au théorème A.1 pour l'espace $W^1(\Omega')$.

Théorème A.4 *On suppose que Γ est de classe C^1 par morceaux. Soit \mathcal{V} un sous-espace fermé de $W^1(\Omega')$ et $\|\cdot\|$ une norme sur \mathcal{V} vérifiant*

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad |u|_{W^1(\Omega')} \leq \|u\| \leq C \|u|_{W^1(\Omega')}\|.$$

Alors la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_{W^1(\Omega')}$.

Preuve. Il faut démontrer qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\forall u \in \mathcal{V}, \quad C_1 \|u|_{W^1(\Omega')}\| \leq \|u\|.$$

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe pour tout entier m un $w_m \in \mathcal{V}$ tel que

$$\|w_m\| < \frac{1}{m} \|w_m|_{W^1(\Omega')}\|.$$

On normalise en posant $v_m = \frac{w_m}{\|w_m|_{W^1(\Omega')}\|}$, ce qui donne

$$\|v_m|_{W^1(\Omega')}\| = 1 \quad \text{et} \quad \|v_m\| < \frac{1}{m}.$$

On suppose que $\Omega \subset B_a$ et on considère deux fonctions φ et ψ régulières et positives telles que

$$\begin{cases} \varphi + \psi = 1 & \text{dans } \Omega', \\ \varphi = 0 & \text{pour } |x| \geq 2a, \\ \psi = 0 & \text{pour } |x| \leq a. \end{cases}$$

En dérivant les produits, nous obtenons que pour tout $v \in W^1(\Omega')$:

$$\begin{cases} |\psi v|_{W^1(B'_a)} \leq |v|_{1,B'_a} + C\|v\|_{0,B_{2a} \cap \Omega'}, \\ |\varphi v|_{1,B_{2a} \cap \Omega'} \leq |v|_{1,B_{2a} \cap \Omega'} + C\|v\|_{0,B_{2a} \cap \Omega'}. \end{cases}$$

Or l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. On peut donc extraire de v_m une suite v_{m_k} qui converge dans $L^2(B_{2a} \cap \Omega')$ vers $v \in L^2(B_{2a} \cap \Omega')$. Nous notons v_k au lieu de v_{m_k} . Nous avons

$$\begin{cases} |\psi v_n - \psi v_m|_{W^1(B'_a)} \leq |v_n - v_m|_{1,B'_a} + C\|v_n - v_m\|_{0,B_{2a} \cap \Omega'}, \\ |\varphi v_n - \varphi v_m|_{1,B_{2a} \cap \Omega'} \leq |v_n - v_m|_{1,B_{2a} \cap \Omega'} + C\|v_n - v_m\|_{0,B_{2a} \cap \Omega'}. \end{cases}$$

D'où, en utilisant en particulier l'équivalence de la norme et de la semi-norme sur $W_0^1(B'_a)$,

$$\begin{cases} \|\psi v_n - \psi v_m\|_{W^1(B'_a)} \leq C_1|v_n - v_m|_{1,B'_a} + C_2\|v_n - v_m\|_{0,B_{2a} \cap \Omega'}, \\ \|\varphi v_n - \varphi v_m\|_{1,B_{2a} \cap \Omega'} \leq |v_n - v_m|_{1,B_{2a} \cap \Omega'} + C\|v_n - v_m\|_{0,B_{2a} \cap \Omega'}. \end{cases}$$

On en déduit que les suites $(\psi v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ et $(\varphi v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans $W_0^1(B'_a)$ et $H^1(B_{2a} \cap \Omega')$ qui sont complets. Il en résulte que

$$\begin{cases} \psi v_n \rightarrow v_1, v_1 \in W_0^1(B'_a), \\ \varphi v_n \rightarrow v_2, v_2 \in H^1(B_{2a} \cap \Omega'), \end{cases}$$

donc, \mathcal{V} étant fermé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v \text{ dans } \mathcal{V} \quad \text{et} \quad v \in \mathcal{V}.$$

Mais, comme $\|v_m\| < 1/m$, v_m tend vers 0 au sens de cette même norme. Donc $v = 0$, ce qui est impossible puisque $\|v_m\|_{1,\Omega} = 1$. \square

Nous en déduisons l'inégalité de Poincaré sur $W_0^1(\Omega')$.

Corollaire A.5 *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in W_0^1(\Omega')$,*

$$\|u\|_{W^1(\Omega')} \leq c|u|_{W^1(\Omega')}.$$

Preuve. La semi-norme est une norme sur $W_0^1(\Omega')$. Il suffit d'appliquer le théorème A.4. \square

Espace $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$

Nous munissons $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ de la semi-norme

$$|U|_{W^1(\Omega')/\mathbb{C}} = |u|_{W^1(\Omega')},$$

où u est un représentant quelconque de U . Nous avons l'inégalité de Poincaré suivante.

Proposition A.6 *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $U \in W^1(\Omega')/\mathbb{C}$,*

$$\|U\|_{W^1(\Omega')/\mathbb{C}} \leq c|U|_{W^1(\Omega')/\mathbb{C}}.$$

Preuve. La semi-norme est une norme sur $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$. Or $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ s'identifie à un sous-espace fermé de $W^1(\Omega')$. Il suffit d'appliquer le théorème A.4. \square

A.2 Equations intégrales pour les problèmes de trou

A.2.1 Les problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur

La proposition suivante est une conséquence des inégalités de Poincaré dans $H^1(\Omega)$ et $W_0^1(\Omega')$ (Corollaire A.5).

Proposition A.7 Soit $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Les problèmes

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = \varphi & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega', \\ u_2 = \varphi & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

admettent chacun une solution unique, respectivement dans $H^1(\Omega)$ et $W^1(\Omega')$. Il existe de plus des constantes C_1 et C_2 indépendantes de φ telles que

$$\begin{cases} \|u_1\|_{1,\Omega} \leq C_1 \|\varphi\|_{1/2,\Gamma}, \\ \|u_2\|_{W^1(\Omega')} \leq C_2 \|\varphi\|_{1/2,\Gamma}. \end{cases}$$

A.2.2 Les problèmes de Neumann intérieur et extérieur

Définition A.1 Nous posons

$$H_0^{-1/2}(\Gamma) = \left\{ u \in H^{-1/2}(\Gamma), \int_{\Gamma} u ds = 0 \right\}.$$

La proposition suivante est une conséquence des inégalités de Poincaré dans $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$ (Proposition A.2) et $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ (Corollaire A.6).

Proposition A.8 Soit $g \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$. Les problèmes

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u_1 = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \partial_n u_2 = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

admettent chacun une solution unique, respectivement dans $H^1(\Omega)/\mathbb{C}$ et $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$. Il existe de plus des constantes C_1 et C_2 indépendantes de φ telles que

$$\begin{cases} \|u_1\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{C}} \leq C_1 \|g\|_{-1/2,\Gamma}, \\ \|u_2\|_{W^1(\Omega')/\mathbb{C}} \leq C_2 \|g\|_{-1/2,\Gamma}. \end{cases}$$

A.2.3 Solution élémentaire

La proposition suivante est classique.

Proposition A.9 On note E la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \|x\|.$$

Alors E est une solution élémentaire du laplacien, c'est-à-dire que $E \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ et vérifie au sens des distributions

$$\Delta E = \delta_0.$$

A.2.4 Notion de saut

Nous dirons qu'une fonction $u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega')$ si $u|_\Omega \in H^1(\Omega)$ et $u|_{\Omega'} \in W^1(\Omega')$.

Soit $u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega')$. Nous désignons par u_e et u_i les traces respectives de $u|_{\Omega'}$ et $u|_\Omega$ sur Γ et nous définissons le saut

$$[u] = u_e - u_i.$$

Si de plus $\Delta u \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega')$, nous définissons pour toute fonction $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ dont un relèvement sur $H^1(\Omega) \times W^1(\Omega')$ est noté $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \partial_n^e u \varphi ds &= - \int_{\Omega'} \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi} dx - \int_{\Omega'} \Delta u \tilde{\varphi} dx, \\ \int_\Gamma \partial_n^i u \varphi ds &= + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi} dx + \int_{\Omega'} \Delta u \tilde{\varphi} dx, \\ [\partial_n u] &= \partial_n^e u - \partial_n^i u. \end{aligned}$$

Ici, comme ailleurs, les produits de dualité entre $H^{1/2}$ et $H^{-1/2}$ sont notés par une intégrale. La normale est toujours choisie extérieure à Ω .

A.2.5 Potentiel de simple couche

Propriété des fonctions harmoniques sur $\Omega \cup \Omega'$

Proposition A.10 *Soit $u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega')$ vérifiant $\Delta u = 0$ sur Ω et sur Ω' . Alors il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que, au sens des distributions sur \mathbb{R}^2 ,*

$$u(x) = \int_\Gamma [\partial_n u](y) E(x-y) ds(y) + \int_\Gamma [u](y) \partial_n E(x-y) ds(y) + \lambda.$$

Preuve. Elle se fait en deux étapes.

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}, \mathbb{R}^2} &= \int_{\Omega \cup \Omega'} u \Delta \varphi dx \\ &= - \int_{\Omega \cup \Omega'} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Gamma [u] \partial_n \varphi ds \\ &= \int_\Gamma [\partial_n u] \varphi ds - \int_\Gamma [u] \partial_n \varphi ds. \end{aligned}$$

On en déduit que $\Delta u = T$ avec

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}, \mathbb{R}^2} = \int_\Gamma [\partial_n u] \varphi ds - \int_\Gamma [u] \partial_n \varphi ds \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

2. Il s'ensuit qu'une solution de l'équation $\Delta u = T$ est $v = T * E$. Montrons que nécessairement u et v diffèrent d'une constante. Soit $w = v - u$. Sa transformée de Fourier vérifie

$$|\xi|^2 \hat{w} = 0.$$

Son support est donc inclus dans $\{0\}$: \hat{w} est une somme finie de dérivées de masses de Dirac en l'origine. On en déduit que w est un polynôme. Le comportement à l'infini des fonctions de $W^1(\Omega')$ impose que w est une constante.

□

Résolution du problème de Dirichlet

Soit $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Nous nous intéressons au problème : chercher $u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega')$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \cup \Omega', \\ u = \varphi & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Le lemme suivant est classique. Nous renvoyons par exemple à [4] pour la démonstration.

Lemme A.11 *Pour tout $p \in H^{-1/2}(\Gamma)$,*

$$\begin{aligned} \partial_{n_x}^e \int_{\Gamma} p(y) E(x-y) ds(y) &= +\frac{p(x)}{2} + \int_{\Gamma} p(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y), \\ \partial_{n_x}^i \int_{\Gamma} p(y) E(x-y) ds(y) &= -\frac{p(x)}{2} + \int_{\Gamma} p(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y). \end{aligned}$$

Théorème A.12 *Le problème : chercher $(p, \lambda) \in H_0^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{C}$ tel que*

$$\int_{\Gamma} p(y) E(x-y) ds(y) + \lambda = \varphi(x) \quad \forall x \in \Gamma \quad (\text{A.2})$$

admet une unique solution. La solution de (A.1) est alors

$$u(x) = \int_{\Gamma} p(y) E(x-y) ds(y) + \lambda.$$

De plus, l'application $\varphi \mapsto (p, \lambda)$ est un isomorphisme de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H_0^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbb{C}$.

Preuve.

1. Existence. Soit u solution de (A.1). Posons

$$p = [\partial_n u] \in H_0^{-1/2}(\Gamma).$$

La proposition A.10 affirme qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$u(x) = \int_{\Gamma} p(y) E(x-y) ds(y) + \lambda.$$

Ce couple (p, λ) est solution de (A.2).

2. Unicité. Supposons que (p_1, λ_1) et (p_2, λ_2) sont deux solutions de (A.2). Par unicité de la solution de (A.1), nous avons

$$\int_{\Gamma} p_1(y) E(x-y) ds(y) + \lambda_1 = \int_{\Gamma} p_2(y) E(x-y) ds(y) + \lambda_2 \quad \forall x \in \Omega \cup \Omega'.$$

Posons $p = p_2 - p_1$ et $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Ainsi,

$$\int_{\Gamma} p(y) E(x-y) ds(y) + \lambda = v(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \cup \Omega'.$$

Le lemme A.11 implique $p = [v] = 0$. Nous en déduisons ensuite que $\lambda = 0$.

3. Isomorphisme. Par composition, l'application

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow H_0^{-1/2}(\Gamma), \\ \varphi &\mapsto [\partial_n u] = p, \end{aligned}$$

où u est solution de A.1, est continue. Puis par différence, nous obtenons que l'application

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \varphi &\mapsto \lambda = \frac{1}{|D|} \int_D \left[u(x) - \int_{\Gamma} p(y) E(x-y) ds(y) \right] dx, \end{aligned}$$

où D est un ouvert borné quelconque, est continue.

□

Résolution du problème de Neumann extérieur

Soit $g \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$. Nous nous intéressons au problème : chercher $u \in W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \partial_n u = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Le lemme suivant est démontré dans [4].

Lemme A.13 *L'opérateur*

$$\begin{aligned} J : H_0^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H_0^{-1/2}(\Gamma) \\ p &\mapsto \psi \end{aligned}$$

avec

$$\psi(x) = \int_{\Gamma} p(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y)$$

est linéaire continu et compact.

Théorème A.14 *Le problème : chercher $p \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$ tel que*

$$\frac{p(x)}{2} + \int_{\Gamma} p(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y) = g(x) \quad \forall x \in \Gamma \quad (\text{A.4})$$

admet une unique solution. La solution de (A.3) est alors

$$u(x) = \int_{\Gamma} p(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y) + Cte.$$

De plus, l'application $g \mapsto p$ est un automorphisme de $H_0^{-1/2}(\Gamma)$.

Preuve. Nous allons directement montrer que $I/2 + J$ est un automorphisme de $H_0^{-1/2}(\Gamma)$. D'après l'alternative de Fredholm et le lemme A.13, il suffit de montrer que cet opérateur est surjectif. Pour tout $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, on considère $u \in H^1(\Omega) \times W^1(\Omega')$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \cup \Omega', \\ \partial_n^e u = g & \text{sur } \Gamma, \\ [u] = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et on pose

$$p = [\partial_n u].$$

Remarquons dès à présent que p dépend continûment de g pour les normes adéquates. Grâce à la proposition A.10,

$$u(x) = \int_{\Gamma} p(y) \partial_{n_x} E(x-y) ds(y) + Cte.$$

Le lemme A.11 indique que $(I/2 + J)p = g$. □

A.3 Equations intégrales pour les fissures

A.3.1 Définitions

Soit Γ un arc régulier de \mathbb{R}^2 de longueur finie et sans point double. On note $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ (voir figure A.3.1).

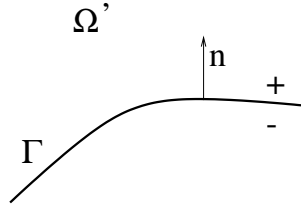


FIG. A.1 – Fissure

Les espaces $W^1(\Omega')$, $W_0^1(\Omega')$ et $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ sont définis comme au paragraphe A.1.3. On suppose qu'il existe un arc $\tilde{\Gamma}$ prolongeant Γ de chaque côté. L'espace $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ peut être défini par (voir [5])

$$H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \left\{ u|_{\Gamma}, u \in H^{1/2}(\tilde{\Gamma}) \right\}.$$

Nous posons pour tout $u \in W^1(\Omega')$, avec les notations de la figure A.3.1,

$$[u] = u^+ - u^- \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$$

et, lorsque $\Delta u \in L^2(\Omega')$

$$\int_{\Gamma} [\partial_n u] \varphi dx = - \int_{\Omega'} \nabla u \cdot \nabla \tilde{\varphi} - \int_{\Omega'} \Delta u \tilde{\varphi} dx \quad \forall \varphi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$$

où $\tilde{\varphi}$ est un relèvement de φ dans $W^1(\Omega')$. Il est possible de montrer que cette dernière définition est indépendante du relèvement choisi, ce qui permet de considérer $[\partial_n u]$ comme un élément de $H_{00}^{1/2}(\Gamma)'$.

Nous définissons le sous-Hilbert de $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$

$$K = \{u \in W^1(\Omega')/\mathbb{C}, \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega' \text{ et } [\partial_n u] = 0\}.$$

A.3.2 Les problèmes extérieurs

La proposition suivante est une conséquence de l'inégalité de Poincaré dans $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ (Corollaire A.6).

Proposition A.15 *Soit $q \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ et $g \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)'$. Les problèmes : chercher $u, v \in W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ tels que*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \partial_n u = g & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega', \\ [v] = q & \text{sur } \Gamma, \\ [\partial_n v] = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

admettent chacun une unique solution. De plus, les applications

$$\begin{array}{ccc} H_{00}^{1/2}(\Gamma)' & \rightarrow & K \\ J_0 : g & \mapsto & u \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} H_{00}^{1/2}(\Gamma) & \rightarrow & K \\ J_1 : q & \mapsto & v \end{array}$$

sont des isomorphismes.

Nous posons

$$J = J_1^{-1} \circ J_0.$$

C'est un isomorphisme de $(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$ dans $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$.

A.3.3 Potentiel de double couche

Nous adaptons ici un travail présenté dans [2] dans le cas d'un arc fermé.

Propriété des fonctions harmoniques sur Ω'

La proposition suivante se démontre comme la proposition A.10.

Proposition A.16 *Soit $u \in W^1(\Omega')$ vérifiant $\Delta u = 0$ sur Ω' . Alors il existe une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que, au sens des distributions sur \mathbb{R}^2 ,*

$$u(x) = \int_{\Gamma} [\partial_n u](y) E(x-y) ds(y) + \int_{\Gamma} [u](y) \partial_n E(x-y) ds(y) + \lambda.$$

Résolution du problème de Neumann

Des propositions A.15 et A.16, nous déduisons le résultat suivant.

Théorème A.17 *Soit $g \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$ et $q = Jg \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. Alors la solution de (A.5) est $u = J_0g = J_1q$, à savoir*

$$u(x) = \int_{\Gamma} q(y) \partial_n E(x-y) ds(y) + Cte.$$

Formulation variationnelle de l'équation intégrale

Pour tous $q, q' \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, nous posons

$$a(q, q') = - \int_{\Gamma} J^{-1} q \bar{q}' ds.$$

Théorème A.18 *La forme sesquilinéaire a est hermitienne, continue et coercive sur $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. De plus, pour tout $g \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$, $q = Jg$ est l'unique solution de*

$$a(q, q') = - \int_{\Gamma} g \bar{q}' ds \quad \forall q' \in H_{00}^{1/2}(\Gamma). \quad (\text{A.7})$$

Preuve.

1. L'égalité (A.7) est évidente.
2. Montrons que a est hermitienne. Pour tous $q, q' \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, posons $u = J_1q$ et $u' = J_1q'$. Nous avons

$$\begin{aligned} a(q, q') &= - \int_{\Gamma} J^{-1} q \bar{q}' ds \\ &= - \int_{\Gamma} (J_0^{-1}u) (\overline{J_1^{-1}u'}) ds \\ &= - \int_{\Gamma} \partial_n u \overline{[u']} ds \\ &= \int_{\Omega'} \nabla u \cdot \overline{\nabla u'} dx. \end{aligned}$$

Il en découle que a est hermitienne.

3. Montrons que a est coercive. Nous avons grâce à l'inégalité de Poincaré dans $W^1(\Omega')/\mathbb{C}$ et au fait que J_1 est un isomorphisme d'espace de Hilbert :

$$\begin{aligned} a(q, q) &= \|J_1q\|_{W^1(\Omega')}^2 \\ &\geq c \|J_1q\|_{W^1(\Omega')/\mathbb{C}}^2 \\ &\geq c \|q\|_{\frac{1}{2}, 00, \Gamma}^2. \end{aligned}$$

□

Equation intégrale explicite pour une fissure rectiligne

Nous supposons ici que Γ est un segment. Nous notons $\mathcal{C}_0^\infty(\Gamma)$ l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ telles que u ainsi que toutes ses dérivées s'annulent aux extrémités de Γ . C'est un espace dense dans $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$. Soit s une abscisse curviligne sur Γ .

Lemme A.19 *Si $q \in \mathcal{C}_0^\infty(\Gamma)$, alors*

$$J^{-1}q(x_0) = \int_{\Gamma} \frac{d^2q}{ds^2}(y)E(x_0 - y)ds(y) \quad \forall x_0 \in \Gamma.$$

Preuve. Les notations sont celles de la figure A.2. D'après le théorème A.17,

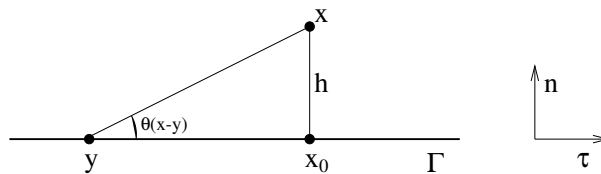


FIG. A.2 – Fissure rectiligne

$$J_1q(x) = \int_{\Gamma} q(y)\partial_n E(x - y)ds(y) + Cte \quad \forall x \in \Omega'.$$

Or

$$\partial_n E(x - y) = \frac{(x - y) \cdot n}{2\pi \|x - y\|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(x - y)}{ds(y)}.$$

D'où, en intégrant par parties :

$$J_1q(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dq}{ds}(y)\theta(x - y)ds(y) + Cte \quad \forall x \in \Omega'.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} J^{-1}q(x_0) &= \partial_n J_1q(x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dq}{ds}(y) \frac{d\theta(x - y)}{dn} ds(y). \end{aligned}$$

Or

$$\frac{d\theta(x - y)}{dn} = \frac{(x - y) \cdot \tau}{\|x - y\|^2} = \frac{d \ln \|x - y\|}{ds}.$$

En intégrant à nouveau par parties, nous obtenons :

$$J^{-1}q(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\Gamma} \frac{d^2q}{ds^2}(y)E(x - y)ds(y).$$

Le théorème de convergence dominée donne le résultat. □

Théorème A.20 Pour tous $q \in (H_{00}^{1/2} \cap C^1)(\Gamma)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma)$,

$$a(q, \varphi) = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{dq}{ds}(x) \overline{\frac{d\varphi}{ds}(y)} E(x-y) ds(x) ds(y).$$

Preuve. Grâce au théorème A.18 et au lemme A.19, nous avons :

$$\begin{aligned} a(q, \varphi) &= a(\varphi, q) \\ &= - \int_{\Gamma} J^{-1} \varphi \bar{q} ds \\ &= - \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma} \frac{d^2 \varphi}{ds^2}(y) E(x-y) ds(y) \right] q(x) ds(x) \\ &= - \int_{\Gamma} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{d^2 \varphi}{ds^2}(y) E(x-y) ds(y) \right] q(x) ds(x) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left\{ \left[\frac{d\varphi}{ds}(y) E(x-y) \right]_{x-\varepsilon\tau}^{x+\varepsilon\tau} + \int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{d\varphi}{ds}(y) \frac{dE}{ds}(x-y) ds(y) \right\} q(x) ds(x) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi}{ds}(y) E(x-y) \right]_{x-\varepsilon\tau}^{x+\varepsilon\tau} q(x) ds(x) \\ &\quad - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \frac{d}{ds} \left[\int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{d\varphi}{ds}(y) E(x-y) ds(y) \right] q(x) ds(x) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[\frac{d\varphi}{ds}(x + \varepsilon\tau) E(-\varepsilon\tau) - \frac{d\varphi}{ds}(x - \varepsilon\tau) E(\varepsilon\tau) \right] q(x) ds(x) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} \frac{d\varphi}{ds}(y) E(x-y) ds(y) \right] \frac{dq}{ds}(x) ds(x) \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} E(\varepsilon\tau) \left[\frac{d\varphi}{ds}(x + \varepsilon\tau) - \frac{d\varphi}{ds}(x - \varepsilon\tau) \right] q(x) ds(x) \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left[\int_{\Gamma} \frac{d\varphi}{ds}(y) E(x-y) ds(y) \right] \frac{dq}{ds}(x) ds(x). \end{aligned}$$

Le premier terme est nul d'après le théorème de convergence dominée. En effet,

$$\left| E(\varepsilon\tau) \left[\frac{d\varphi}{ds}(x + \varepsilon\tau) - \frac{d\varphi}{ds}(x - \varepsilon\tau) \right] q(x) \right| \leq c \ln \varepsilon \cdot \varepsilon \sup_{\Gamma} \left| \frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right| |q(x)|.$$

Nous en déduisons le théorème. □

References

- [1] R. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, 1985.
- [2] J. GIROIRE, J.-C. NÉDÉLEC, *Numerical solution of an exterior problem using a double layer potential*, *Mathematics of computation*, vol. 32, num. 144, pp. 973-990, 1978.
- [3] F. HIRSCH, G. LACOMBE, *Eléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1997.
- [4] R. KRESS, *Linear integral equations*, Springer-Verlag, 1989.
- [5] J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1968.
- [6] P.A. RAVIART, J.-M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod, 1998.

Annexe B

Quelques formules utiles

Formules de changement de variable

Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^N et $u \in H^1(\mathcal{O})$. Alors

$$\begin{aligned}\|u(\rho x)\|_{0,\mathcal{O}} &= \rho^{-\frac{N}{2}} \|u\|_{0,\rho\mathcal{O}} \\ |u(\rho x)|_{1,\mathcal{O}} &= \rho^{1-\frac{N}{2}} |u|_{1,\rho\mathcal{O}}\end{aligned}$$

Rappel d'une injection de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N et $p \in [1, +\infty]$. Nous avons $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec

$$\begin{cases} \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} & \text{si } p < N, \\ q \in [p, +\infty[& \text{si } p = N, \\ q = +\infty & \text{si } p > N. \end{cases}$$

Une conséquence de l'inégalité de Hölder et de l'injection de Sobolev

Soit Ω un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N , $p \in [1, +\infty]$ et $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. Alors

$$\|\nabla uv\|_{L^r(\Omega)^N} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{1}{r} = \frac{2}{p} - \frac{1}{N} & \text{si } p < N, \\ r \in \left[\frac{p}{2}, p\right[& \text{si } p = N, \\ r = p & \text{si } p > N. \end{cases}$$

Résumé : L’optimisation de forme topologique est la recherche de la géométrie d’un objet qui soit optimale vis à vis d’un critère donné, et ce sans aucun a priori sur sa topologie, c’est-à-dire sur le nombre de “trous” qu’il peut contenir. Parmi les différentes stratégies qui ont été élaborées pour y parvenir, celle qui nous intéresse ici, la méthode du “gradient topologique”, consiste à étudier le comportement du critère lors de la création d’un petit trou à l’intérieur du domaine. Plus précisément, le calcul de son développement asymptotique par rapport à la taille du trou fournit une direction de descente qui est à la base de nouveaux algorithmes d’optimisation de forme. De telles formules “d’asymptotique topologique” ont d’ores et déjà été établies pour divers problèmes et l’efficacité de ce nouvel outil a été prouvée, que ce soit en terme de temps de calculs ou de qualité des résultats.

L’objectif de cette thèse est de compléter cette étude à la fois sur les aspects théoriques et numériques. Les principaux points abordés sont :

- la considération de nouveaux types de perturbation du domaine que sont la création de fissures et l’introduction de petites irrégularités dans les coefficients de l’EDP,
- le cas d’opérateurs différentiels non homogènes, puis non linéaires avec une application aux équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles,
- l’adaptation à l’optimisation topologique d’algorithmes itératifs de type Krylov.

Dans chaque cas, un certain nombre de formules sont démontrées grâce à l’emploi de techniques originales et sont illustrées par des tests numériques, comme par exemple l’optimisation d’un guide d’onde et d’une cuve de décantation.

Mots-clés : optimisation de forme, optimisation topologique, sensibilité topologique, gradient topologique.

Title : Theoretical and numerical aspects in topological shape optimization.

Abstract : The goal of topological shape optimization is to find an optimal design without any a priori assumption about its topology, that is, about the number of holes it may contain. Among all the strategies that have been worked out to achieve this end, the one we are interested in here, the “topological gradient” method, consists in looking at the behavior of the criterion when a small hole is inserted inside the domain. More precisely, the computation of its asymptotic expansion with respect to the size of the hole provides a descent direction which gives rise to new shape optimization algorithms. Such “topological asymptotic” formulas have already been obtained for various problems and the performance of this new tool has been proved.

Our purpose is to complete this study, on both theoretical and numerical aspects. We deal with the following topics :

- the consideration of new kinds of domain perturbation, namely the creation of cracks and the introduction of small inhomogeneities in the PDE coefficients,
- the case of non-homogeneous, then nonlinear differential operators with an application to the Navier-Stokes equations for incompressible fluids,
- the adaptation to topological optimization of Krylov algorithms.

In each case, some formulas are proved by means of original techniques and are illustrated by numerical experiments such as the optimization of a waveguide and a purification tank.

Keywords : shape optimization, topological optimization, topological sensitivity topological gradient.
